

UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA - UDESC

CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS - CCT

DEPARTAMENTO DE FÍSICA - DFIS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA - PPGF

PAULO MICHEL LONGO TAVARES DA SILVA

UMA DESCRIÇÃO DA EXPANSÃO E ACELERAÇÃO DO UNIVERSO  
NO CONTEXTO DAS TEORIAS  $f(R)$

JOINVILLE, SC

2012

PAULO MICHEL LONGO TAVARES DA SILVA

UMA DESCRIÇÃO DA EXPANSÃO E ACELERAÇÃO DO UNIVERSO  
NO CONTEXTO DAS TEORIAS  $f(R)$

DISSERTAÇÃO APRESENTADA PARA A  
OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE EM  
FÍSICA DA UNIVERSIDADE DO ESTADO DE  
SANTA CATARINA, CENTRO DE CIÊNCIAS  
TECNOLÓGICAS - CCT, ORIENTADA PELO  
PROF. DR. JORGE GONÇALVES CARDOSO.

JOINVILLE, SC

2012

**"UMA DESCRIÇÃO DA EXPANSÃO E ACELERAÇÃO DO UNIVERSO  
NO CONTEXTO DAS TEORIAS F(R)"**

por

**PAULO MICHEL LONGO TAVARES DA SILVA**

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de

**MESTRE EM FÍSICA**

área de concentração em "Física", e aprovada em sua forma final pelo

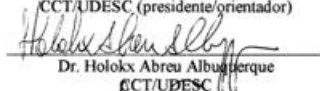
**CURSO DE MESTRADO ACADÊMICO EM FÍSICA  
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS DA  
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA.**



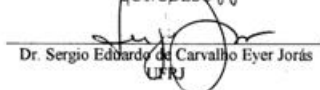
Dr. Jorge Gonçalves Cardoso  
CCT/UDESC (presidente/orientador)

Banca Examinadora:

Joinville, 29 de fevereiro de 2012.



Dr. Holokx Abreu Albuquerque  
CCT/UDESC



Dr. Sergio Eduardo de Carvalho Eyer Jorás  
UFRJ

Dr. Edgard Pacheco Moreira Amorim  
CCT/UDESC (suplente)

## FICHA CATALOGRÁFICA

P586u

Silva, Paulo M. L. T.

Uma descrição da expansão e aceleração do universo  
no contexto das teorias  $f(R)$  / Paulo Michel Longo Tavares da Silva;  
Orientador: Jorge Gonçalves Cardoso. – Joinville, 2012.

46 f. : ix ; 30 cm.

Incluem referências.

Dissertação (mestrado) – Universidade do Estado Santa  
Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Mestrado em  
Física, Joinville, 2012.

1. Aceleração do Universo. 2. Energia Escura. 3. teorias  $f(R)$ .  
I. Cardoso, Jorge G.

CDD 530.11

## AGRADECIMENTOS

Ao grande arquiteto do universo pela oportunidade de estudar uma pequena parcela do universo.

Aos meus pais Paulo Tavares e Zilá Longo, aos meus irmãos Alex Marcel L. e Cassiana L. Tavares e ao meu sobrinho Matheus L. Tavares, pela compreensão dos momentos ausentes e pelo apoio à esta dissertação.

Ao Doutor Jorge Gonçalves Cardoso, pela orientação e transmissão de alguns de seus conhecimentos tanto neste trabalho quanto na formação complementar.

Ao Angelo Amancio e a senhora sua mãe Madalena Amancio, proprietários e amigos a quem confiei minha estadia em Joinville.

Ao doutorando André Martorano, colega de pesquisa e amigo, pelas discussões e troca de conhecimentos.

Aos meus colegas de trabalho na sala do Mestrado em Física, Jorge Leonardo e Alex Kraisch (Física Atômica e Molecular), Taline Krüger e William Prants (Dinâmica não Linear) e ao Douglas do Nascimento (Física da Matéria Condensada).

Aos contribuintes do estado de Santa Catarina, onde foi possível o financiamento da PROMOP.

Aos servidores da UDESC-CCT, pela manutenção do campus.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução Geral</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Teoria da Relatividade Geral</b>	<b>4</b>
2.1	Introdução . . . . .	4
2.2	Tensor de Curvatura . . . . .	5
2.3	Tensor de Ricci e escalar de curvatura . . . . .	6
2.4	Identidades de Bianchi . . . . .	7
2.5	Tensor energia-momento . . . . .	7
2.6	Formulação Lagrangeana e equações de campo . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Cosmologia</b>	<b>11</b>
3.1	Modelo de Friedmann-Robertson-Walker . . . . .	11
3.2	Equações de Friedmann . . . . .	12
3.3	Radiação Cósmica de Fundo . . . . .	15
3.4	Matéria Escura . . . . .	15
3.5	Expansão Acelerada do Universo . . . . .	16
3.6	Constante cosmológica $\Lambda$ . . . . .	18
3.7	Quintessência . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Teorias <math>f(R)</math></b>	<b>22</b>
4.1	Introdução . . . . .	22
4.2	Formalismo métrico . . . . .	23
4.2.1	Equações de Friedmann Generalizadas . . . . .	25
4.2.2	Expansão acelerada com termos $1/R$ . . . . .	25
4.3	Formalismo de Palatini . . . . .	27
4.3.1	Equações de Friedmann Generalizadas . . . . .	29

4.4	Formalismo métrico-afim . . . . .	30
4.4.1	Ação e Equações de campo . . . . .	31
<b>5</b>	<b>Gravidade Maxwell-<math>f(R)</math> via acoplamento mínimo</b>	<b>35</b>
5.1	Introdução . . . . .	35
5.2	Ação e equações de campo . . . . .	36
5.3	Equações de Friedmann-Maxwell- $f(R)$ . . . . .	38
<b>6</b>	<b>Conclusões e perspectivas futuras</b>	<b>40</b>

## RESUMO

SILVA, Paulo M. L. T. Uma descrição da expansão e aceleração do universo no contexto das teorias  $f(R)$ . 2012. 42f. Dissertação (Mestrado em Física - Área: Relatividade e Cosmologia)-Universidade do Estado de Santa Catarina, Programa de Pós-Graduação em Física, Joinville, 2012.

Diante das observações experimentais da expansão cósmica acelerada, diversos modelos teóricos surgiram para explicar a aceleração do Universo. Neste trabalho revisamos modelos tais como a constante cosmológica e quintessência, a qual é modelada por um campo escalar. O contexto aqui apresentado foi elaborado a partir das teorias modificadas da gravitação, também conhecidas como teorias  $f(R)$ . Tal modelo é considerado uma generalização da ação de Einstein-Hilbert onde termos invariantes de curvatura podem descrever um regime acelerado para o universo. As equações de campo podem ser obtidas a partir de três formalismos distintos, a saber, formalismo métrico, Palatini e métrico-afim. Realizamos algumas manipulações algébricas para esses formalismos, bem como a apresentação das equações de Friedmann generalizadas para o formalismo métrico e Palatini. Também apresentamos um modelo no formalismo métrico com um campo de Maxwell acoplado minimamente. As equações de Friedmann-Maxwell- $f(R)$ , as quais dependem da forma funcional de  $f(R)$  como também do campo  $F_{\mu\nu}$ , permitem que uma equação de estado para  $w$  pode ser ajustada em concordância com as medidas do *red-shift* de supernovas IA.

**PALAVRAS-CHAVE:** Aceleração do Universo, Energia Escura, Teorias  $f(R)$



## ABSTRACT

SILVA, Paulo M. L. T. A description of expansion and acceleration of the universe in the context of  $f(R)$  theories. 2012. 47f. Dissertation (Master Course in Physics - Area: Relativity and Cosmology) - Santa Catarina State University, Post Graduation Program in Physics, Joinville, 2012.

This work reviews concisely some of the theoretical attempts to explain the recently observed acceleration of the universe. Emphasis is put on the so-called theories  $f(R)$  which involve invariant modifications of the Einstein-Hilbert Lagrangian density. The pertinent field equations are derived from three distinct formalisms which are known in the literature as the metric formalism, the Palatini formalism and the affine formalism. For the case of the metric and Palatini formalisms, we carry out some interesting calculations and show the corresponding versions of the Friedmann equations. In addition, we present a minimally coupled Friedmann-Maxwell- $f(R)$  model which may give a cosmological equation of state for  $w$  that agrees with available measurements of the red-shift of Ia supernovae.

**KEY WORDS:** Acceleration of the Universe, Dark energy,  $f(R)$  Theory,

## Notação

A assinatura métrica que utilizamos é assumida como  $(-+++)$ . O módulo da velocidade da luz no vácuo é adotado como  $c = 1$ . Os índices gregos variam de 0 a 3, enquanto que os índices latinos variam de 1 a 3. A terminologia *teorias de gravidade  $f(R)$*  é utilizada para os três formalismos estudados.

$g_{\mu\nu}$	Métrica Lorentziana
$g$	Determinante de $g_{\mu\nu}$
$\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda}$	Conexão Afim Geral
$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$	Conexão de Levi-Civita (Símbolos de Cristoffel)
$\nabla_{\mu}$	Derivada covariante em relação $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$
$\bar{\nabla}_{\mu}$	Derivada covariante em relação $\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda}$
$(\mu\nu)$	Simetrização sobre os índices $\mu$ e $\nu \longrightarrow B_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}(B_{\mu\nu} + B_{\nu\mu})$
$[\mu\nu]$	Antissimetrização sobre os índices $\mu$ e $\nu \longrightarrow B_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(B_{\mu\nu} - B_{\nu\mu})$
$R_{\mu\nu\lambda}^{\rho}$	Tensor de Riemann
$R_{\mu\nu}$	Tensor de Ricci
$R$	Escalar de Ricci
$S_M$	Ação para a Matéria
$\mathcal{R}_{\mu\nu}$	Tensor de Ricci construído com $\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda}$
$\mathcal{R}$	Escalar de Ricci construído com $\mathcal{R}_{\mu\nu}$
$T_{\mu\nu}$	Tensor energia-momento
$\psi$	Campo de matéria coletivamente
$\phi$	Campo Escalar

# Capítulo 1

## Introdução Geral

A união da Relatividade Geral (RG) de Einstein e o modelo padrão da física de partículas, a qual descreve a matéria bariônica (comum), sofre deficiências para explicar as atuais observações cosmológicas. As principais observações confrontam questões como a luminosidade do *redshift* a partir de observações de supernovas do tipo Ia (SNIa) [1], o espectro de potência em grande escala investigada a partir do *redshift* de galáxias [2], como também as anisotropias da radiação cósmica de fundo em microondas (RCFM) [3]. Para sanar os problemas oriundos destes resultados cosmológicos no contexto da RG, duas componentes exóticas de matéria e energia são necessárias para a composição do universo. Essas duas componentes são, respectivamente, matéria escura e energia escura, a matéria escura contribuindo com 22% enquanto que a energia escura estaria com uma fatia de aproximadamente 74%. Atualmente a energia escura é a componente que domina a densidade de energia do universo, acarretando na expansão acelerada. Com a confirmação da expansão acelerada do universo [4, 5, 6, 7, 8] vem a inferência de que a dinâmica cósmica está competindo com o colapso gravitacional da matéria e, portanto, deve ter pressão suficientemente negativa.

Depois de várias observações cosmológicas após a década de 90, constatou-se que o universo passou por dois regimes de aceleração cósmica. O primeiro regime é chamado de inflação, a qual acredita-se ter ocorrido antes da dominação de radiação, enquanto que no segundo regime, tem-se a energia escura, atual componente que se permaneceu após a fase do universo dominado por matéria.

Essas duas fases não podem ser explicadas pela matéria padrão, cuja equação de estado  $w = p/\rho$  satisfaz a condição  $w \geq 0$ , onde  $p$  e  $\rho$  são a pressão e a densidade

de energia da matéria, respectivamente. De fato, a fase atual dominada pela energia escura exige uma equação de estado  $w = p/\rho < -1/3$ . Um caso particular para tal componente exótica seria a constante cosmológica, uma candidata mais simples, na qual tem-se  $w_\Lambda = -1$ . No entanto, se a constante cosmológica se origina de uma energia do vácuo da física de partículas, sua escala de energia é muito elevada para ser compatível com a densidade de energia escura [9]. Daí, nasce a necessidade de obter mecanismos alternativos para se obter um valor adequado para  $\Lambda$ , de tal forma que concorde com as observações. Um campo escalar com um potencial variando lentamente [10] pode ser um candidato para a inflação, bem como para a energia escura.

Enquanto os modelos de campos escalares para a inflação e energia escura correspondem a uma modificação do tensor energia-momento nas equações de Einstein, existe uma outra alternativa para explicar a aceleração do universo. Isso corresponde às teorias modificadas da gravidade em relação à RG. A densidade Lagrangeana para RG é dada por  $f(R) = R - 2\Lambda$ , onde  $R$  é o escalar de Ricci e  $\Lambda$  é a constante cosmológica, cujo modelo é conhecido como  $\Lambda$ -matéria escura fria, envolvendo a constante cosmológica com uma equação de estado  $w_\Lambda = -1$ . No entanto, tem sido demonstrado que uma equação de estado que muda com o *redshift*, isto é, que envolve  $w(z)$ , pode simular uma constante cosmológica e ajustar os dados atuais [11, 12].

As teorias que podem generalizar as equações de campo da RG são conhecidas como teorias modificadas da gravidade, abreviadamente teorias  $f(R)$ , onde  $f(R)$  é uma função genérica do escalar de Ricci  $R$ . As modificações se dão simplesmente na densidade Lagrangeana [13, 14] implementadas na ação de Einstein-Hilbert com termos invariantes de curvatura de ordem elevada, por exemplo,  $R^2$ ,  $R^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ ,  $R^{\mu\nu\lambda\sigma}$ ,  $R_{\mu\nu\lambda\sigma}$  ou  $R\Box^k R$ .<sup>1</sup> As equações de campo a partir da variação da ação de Einstein-Hilbert podem ser obtidas a partir de dois formalismos, formalismo métrico e formalismo de Palatini. Portanto, devemos especificar a ação e qual formalismo será utilizado para o cálculo variacional. No formalismo métrico, a variação da ação é apenas em relação ao tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ , resultando em equações diferenciais de quarta ordem na métrica, enquanto que no formalismo de Palatini a métrica e a conexão são assumidas como variáveis independentes, tal que a variação da ação é tomada primeiro com relação a métrica e depois com relação a conexão. Embora ambos os princípios variacionais [16, 17] conduzam às mesmas equações

---

<sup>1</sup> $\Box^k$  é o operador d'Alembertiano com a rotulação  $k$  definindo a dimensão da teoria, por exemplo, o operador  $\Box^5$ , é um operador concernente à teoria de branas [15].

de campo, onde a Lagrangeana é linear em  $R$ , já para uma ação mais geral, isso não ocorre. Ainda existe um terceiro formalismo, denominado métrico-afim, onde a ação para a matéria depende da conexão de acordo com

$$S_M = S_M(g_{\mu\nu}, \Gamma_{\mu\nu}{}^\lambda, \psi).$$

Naturalmente este formalismo é bem mais geral, podendo assim produzir efeitos torsionais na teoria de gravitação, outros métodos podem ser encontrados em [18, 19, 20].

A principal motivação das teorias  $f(R)$  se dá ao fato que os termos de invariantes de curvatura de ordem superior devem ser adicionados na Lagrangeana efetiva do campo gravitacional quando correções quânticas são consideradas [21, 22]. Termos de ordem elevada também têm sido investigados para o sistema solar [23], nucleossíntese do big-bang [24], limite de campo fraco [25], inflação e para a recente aceleração do universo [26]. Aqui, estudaremos teorias  $f(R)$  no contexto da aceleração cósmica.

Este trabalho está organizado como segue. No capítulo 2, exibimos os objetos matemáticos essenciais utilizados na RG e descrevemos a formulação Lagrangeana a partir do princípio variacional tradicional (métrico), de modo a extrair as equações de Einstein. No capítulo 3, apresentamos os elementos da cosmologia de Friedmann-Robertson-Walker, juntamente com alguns parâmetros observacionais de relevância no contexto da Cosmologia. De um modo qualitativo, comentamos os aspectos que levam às inferências sobre a existência de matéria escura no Universo. No âmbito da recentemente descoberta da fase acelerada de nosso universo, trabalhamos um pouco mais elaboradamente tanto para uma constante cosmológica quanto para uma quintessência modelada por um campo escalar. No capítulo 4, o qual reside o foco desta dissertação, elaboramos sobre a dedução das equações de campo no formalismo métrico em teorias  $f(R)$ , descrevendo a expansão acelerada para uma métrica de Friedmann-Robertson-Walker com  $k = 0$ . A partir da ação de Einstein-Hilbert, o formalismo de Palatini bem como as equações de campo, também são apresentados de maneira mais sucinta. Para o formalismo métrico-afim, são fornecidas a forma da ação e as equações de campo. No capítulo 5, sugerimos um modelo nomeado *Maxwell* –  $f(R)$ , no qual um campo de Maxwell é minimamente acoplado ao campo gravitacional para teorias  $f(R)$ , no contexto do formalismo métrico. O princípio variacional, bem como as equações de campo para o modelo são apresentados para uma métrica de FRW. No capítulo 6, traçamos nossas conclusões e algumas perspectivas futuras.

# Capítulo 2

## Teoria da Relatividade Geral

### 2.1 Introdução

Publicada em 1915 por Albert Einstein, a Teoria da Relatividade Geral (TRG) é a generalização da Teoria da Relatividade Especial (TRE). O contexto Minkowskiano é ampliado para o contexto de espaços-tempo curvos. Um dos fundamentos da TRG é o *Princípio de Equivalência*, que estabelece que um referencial inercial não acelerado na presença de um campo gravitacional e um referencial acelerado mas agora sem um campo gravitacional são fisicamente equivalentes. Essencialmente, a TRG é uma teoria clássica de campos a qual descreve os efeitos gravitacionais produzidos pela geometria do espaço-tempo, e é modelada por uma variedade pseudo-Riemanniana livre de torção. Se a variedade em questão possui uma conexão com uma parte antissimétrica, a variedade é dita ser do tipo Riemann-Cartan e a teoria a qual correspondentemente descreve o campo gravitacional é chamada teoria de Einstein-Cartan[27].

Dentre as consequências mais importantes da TRG, podemos citar a deflexão da luz em um campo gravitacional, o *redshift* gravitacional, a precessão do periélio de Mercúrio e a previsão de ondas gravitacionais. O *redshift* gravitacional faz com que o comprimento de onda dos fótons diminua nas proximidades de um campo gravitacional suficientemente forte. O fenômeno da precessão do periélio de Mercúrio, já era estudado pela mecânica clássica, a qual computava um valor discrepante ao observado [28]. As elipses que designam o movimento dos corpos celestes não são fechadas em virtude das perturbações de outros planetas, as quais alteram o ponto do periélio (ponto mais próximo do sol), fazendo assim o periélio precessionar. Mas a questão é que ainda restavam 43" por século

nas previsões da Mecânica Clássica, o que foi interpretado por Einstein como modificações do espaço-tempo para tal situação. Conceitos mais avançados como singularidades e estrutura causal [29], também ocorrem como previsões da TRG.

## 2.2 Tensor de Curvatura

O tensor de curvatura, também chamado tensor de Riemann-Christoffel é de grande importância na TRG. Quando vetores são transportados paralelamente em um circuito fechado em uma variedade, eles geralmente sofrem transformações, estas sendo relacionadas com a curvatura da variedade em questão. O mapeamento local da curvatura é feito pelo tensor de Riemann.

A derivada covariante de um vetor contravariante tem a forma

$$\nabla_\nu V^\rho = \partial_\nu V^\rho + \Gamma_{\nu\lambda}{}^\rho V^\lambda, \quad (2.1)$$

onde

$$\Gamma_{\mu\nu}{}^\lambda = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \quad (2.2)$$

são os símbolos de Christoffel. Aplicando novamente a derivada covariante na equação (2.1), vem

$$\nabla_\mu \nabla_\nu V^\rho = \partial_\mu (\partial_\nu V^\rho + \Gamma_{\nu\lambda}{}^\rho V^\lambda) + \Gamma_{\sigma\mu}{}^\rho (\partial_\nu V^\sigma + \Gamma_{\nu\lambda}{}^\sigma V^\lambda) - \Gamma_{\nu\mu}{}^\sigma (\partial_\sigma V^\rho + \Gamma_{\lambda\sigma}{}^\rho V^\lambda), \quad (2.3)$$

tal que efetuando-se uma permutação indicial  $\mu \leftrightarrow \nu$  na equação (2.3), resulta

$$\nabla_\nu \nabla_\mu V^\rho = \partial_\nu (\partial_\mu V^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}{}^\rho V^\lambda) + \Gamma_{\sigma\nu}{}^\rho (\partial_\mu V^\sigma + \Gamma_{\mu\lambda}{}^\sigma V^\lambda) - \Gamma_{\mu\nu}{}^\sigma (\partial_\sigma V^\rho + \Gamma_{\lambda\sigma}{}^\rho V^\lambda). \quad (2.4)$$

Subtraindo a equação (2.4) da equação (2.3), bem como efetuando as substituições indiciais necessárias e levando-se em consideração a comutatividade das derivadas parciais bem como a simetria dos índices inferiores do símbolos de Christoffel, isto é,  $\Gamma_{\nu\mu}{}^\lambda = \Gamma_{\mu\nu}{}^\lambda$ , a expressão rearranjada para o comutador torna-se

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\rho = (\partial_\mu \Gamma_{\nu\lambda}{}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}{}^\rho + \Gamma_{\sigma\mu}{}^\rho \Gamma_{\nu\lambda}{}^\sigma - \Gamma_{\sigma\nu}{}^\rho \Gamma_{\mu\lambda}{}^\sigma) V^\lambda, \quad (2.5)$$

onde o termo entre parenteses é identificado como o tensor de Riemann

$$R_{\mu\nu\lambda}{}^\rho = \partial_\mu \Gamma_{\nu\lambda}{}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}{}^\rho + \Gamma_{\sigma\mu}{}^\rho \Gamma_{\nu\lambda}{}^\sigma - \Gamma_{\sigma\nu}{}^\rho \Gamma_{\mu\lambda}{}^\sigma. \quad (2.6)$$

Como podemos notar, o tensor de Riemann aparece como um tensor de quarta ordem e, portanto, de 256 componentes. Mas, devidos às propriedades de simetria e antissimetria, suas componentes se reduzem a 20. Vejamos algumas das propriedades algébricas do tensor de curvatura

$$R_{\mu\nu\lambda\sigma} = R_{\mu\nu\lambda}{}^{\rho} g_{\rho\sigma}.$$

(A) Simetria:

$$R_{\mu\nu\lambda\sigma} = R_{\lambda\sigma\mu\nu}. \quad (2.7)$$

(B) Antissimetria:

$$R_{\mu\nu\lambda\sigma} = -R_{\nu\mu\lambda\sigma} = -R_{\mu\nu\sigma\lambda} = R_{\nu\mu\sigma\lambda}. \quad (2.8)$$

(C) Ciclicidade:

$$R_{\mu\nu\lambda\sigma} + R_{\mu\sigma\nu\lambda} + R_{\mu\lambda\nu\sigma} = 0. \quad (2.9)$$

## 2.3 Tensor de Ricci e escalar de curvatura

Podemos agora, por uma contração do tensor de Riemann, obter um tensor de segunda ordem que porta um número de 10 componentes independentes no caso mais geral, chamado tensor de Ricci

$$R_{\mu\lambda} = R_{\mu\rho\lambda}{}^{\rho}. \quad (2.10)$$

A propriedade de simetria em (A) mostra que o tensor de Ricci é simétrico, isto é,

$$R_{\mu\lambda} = R_{\lambda\mu}, \quad (2.11)$$

tal que, em termos das componentes da conexão, temos

$$R_{\mu\lambda} = R_{\mu\rho\lambda}{}^{\rho} = \partial_{\mu}\Gamma_{\rho\lambda}{}^{\rho} - \partial_{\rho}\Gamma_{\mu\lambda}{}^{\rho} + \Gamma_{\sigma\mu}{}^{\rho}\Gamma_{\rho\lambda}{}^{\sigma} - \Gamma_{\sigma\rho}{}^{\rho}\Gamma_{\mu\lambda}{}^{\sigma}. \quad (2.12)$$

A propriedade de antissimetria em (B) assegura-nos que  $R_{\mu\lambda}$  é o único tensor de segunda ordem que pode ser formado a partir do tensor de Riemann, a menos de um sinal arbitrário. Também, podemos contrair o tensor de Ricci  $R_{\sigma\nu}$  e construir o escalar de Ricci, também denominado escalar de curvatura, dado por

$$R = g^{\mu\lambda} R_{\mu\lambda}. \quad (2.13)$$

O escalar de Ricci especifica um número real em cada ponto da variedade sob consideração, determinando a curvatura intrínseca da variedade nesse ponto.



## 2.4 Identidades de Bianchi

O tensor de curvatura também obedece algumas identidades diferenciais, a saber

$$\nabla_{\zeta} R_{\mu\nu\lambda\sigma} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^{\zeta}} \left( \frac{\partial^2 g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\sigma} \partial x^{\nu}} - \frac{\partial^2 g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\sigma} \partial x^{\mu}} - \frac{\partial^2 g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\nu}} - \frac{\partial^2 g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\mu}} \right). \quad (2.14)$$

Permutando-se  $\zeta, \mu$  e  $\nu$  ciclicamente, obtemos as *identidades de Bianchi*

$$\nabla_{\zeta} R_{\mu\nu\lambda\sigma} + \nabla_{\mu} R_{\nu\zeta\lambda\sigma} + \nabla_{\nu} R_{\zeta\mu\lambda\sigma} = 0, \quad (2.15)$$

que também podem ser escritas como

$$\nabla_{[\zeta} R_{\mu\nu]\lambda\sigma} = 0.$$

Agora, posto que a conexão é compatível com a métrica, isto é,  $\nabla_{\zeta} g^{\nu\sigma} = 0$ , e fazendo a contração de  $\nu$  com  $\sigma$  (2.15), chegamos em

$$\nabla_{\zeta} R_{\mu\lambda} - \nabla_{\mu} R_{\zeta\lambda} + \nabla_{\nu} R_{\zeta\mu\lambda}{}^{\nu} = 0. \quad (2.16)$$

Agora, efetuando-se a contração de  $\mu$  com  $\lambda$ , vem

$$\nabla_{\zeta} R - \nabla_{\mu} R_{\zeta}{}^{\mu} - \nabla_{\nu} R_{\zeta}{}^{\nu} = 0, \quad (2.17)$$

tal que, realizando substituições indiciais adequadas, após simples manipulações obtemos as *identidades contraídas de Bianchi*

$$\nabla_{\mu} \left( R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) = 0. \quad (2.18)$$

## 2.5 Tensor energia-momento

Dada uma fenomenologia gravitacional com fontes, as equações de campo da TRG requerem um objeto matemático que carrega informações sobre matéria e energia englobadas em um determinado espaço-tempo. Ou seja, o fluxo de *quadrimento*  $P^{\mu}$  que atravessa uma superfície  $x^{\nu}$  constante é representado pelo tensor energia-momento (denotado por  $T^{\mu\nu}$ ). Outra definição do tensor energia-momento será dada em termos da derivada funcional da ação para a matéria com respeito a métrica, dada pela equação (2.36).

De um modo geral, o tensor energia-momento contém, por exemplo, componentes de um fluido que podem produzir pressão, entropia, viscosidade, etc. O fluido perfeito com densidade de energia  $\rho$ , pressão  $p$  e quadrivetor velocidade  $u^\mu = dx^\mu/d\tau$  que em um sistema de coordenadas comóveis é dado por  $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$ , é representado por

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu}, \quad (2.19)$$

onde a componente  $T^{00}$  é a densidade de energia,  $T^{0i}$  representa a densidade de momento e  $T^{ij}$  são as componentes do fluxo de momento. O tensor energia-momento é simétrico e obedece a seguinte lei de conservação:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.20)$$

## 2.6 Formulação Lagrangeana e equações de campo

O desenvolvimento formal que leva às equações de campo de Einstein pode ser elaborado através de uma formulação Lagrangeana. Daí, tradicionalmente, inicia-se os procedimentos com uma ação apropriada a fim de extrair as equações de campo que constituem a teoria em questão.

No caso da gravitação de Einstein, o funcional adotado é o de Einstein-Hilbert. Em adição à ação gravitacional, temos a ação para a matéria, tal que a ação total é

$$S = S_{EH} + S_M. \quad (2.21)$$

Agora, consideramos uma região espaço-temporal 4-dimensional limitada  $\Omega$  onde os campos de interesse são definidos, e reescrevemos  $S$  em termos das densidades Lagrangeanas individuais

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int_\Omega \sqrt{-g} R d^4x + \int_\Omega \mathcal{L}_m(\psi, g_{\mu\nu}) \sqrt{-g} d^4x, \quad (2.22)$$

onde  $\kappa = 8\pi G$ ,  $\sqrt{-g} d^4x$  é o elemento invariante de volume e  $\mathcal{L}_m$  é a densidade Lagrangeana da matéria. Segundo o princípio da mínima ação,  $S$  possui um máximo ou mínimo, tal que  $\delta S = 0$ .

Primeiramente, iremos efetuar as variações na ação de Einstein-Hilbert, ou seja no primeiro termo da expressão (2.22). Temos

$$\delta S_{EH} = \frac{1}{2\kappa} \int_\Omega (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} d^4x \delta R_{\mu\nu} + d^4x \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + d^4x R \delta \sqrt{-g}). \quad (2.23)$$

A variação do tensor de Ricci  $\delta R_{\mu\nu}$  em termos das conexões é dada por

$$\delta R_{\mu\nu} = \partial_\rho \delta \Gamma_{\nu\mu}{}^\rho - \partial_\nu \delta \Gamma_{\rho\mu}{}^\rho + \delta \Gamma_{\rho\lambda}{}^\rho \Gamma_{\nu\mu}{}^\lambda + \Gamma_{\rho\lambda}{}^\rho \delta \Gamma_{\nu\mu}{}^\lambda - \delta \Gamma_{\nu\lambda}{}^\rho \Gamma_{\rho\mu}{}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}{}^\rho \delta \Gamma_{\rho\mu}{}^\lambda. \quad (2.24)$$

Esta última expressão pode ser reescrita em termos de derivadas covariantes, pois a variação  $\delta \Gamma_{\nu\mu}{}^\rho$  é a diferença de duas conexões. Tal diferença possui um caráter tensorial, e podemos implementar sua derivada covariante como segue

$$\nabla_\rho (\delta \Gamma_{\nu\mu}{}^\rho) = \partial_\rho \delta \Gamma_{\nu\mu}{}^\rho + \Gamma_{k\rho}{}^\rho \delta \Gamma_{\nu\mu}{}^k - \Gamma_{\nu\rho}{}^k \delta \Gamma_{k\mu}{}^\rho - \Gamma_{\mu\rho}{}^k \delta \Gamma_{\nu k}{}^\rho. \quad (2.25)$$

Assim, a variação  $\delta R_{\mu\nu}$  pode ser rearranjada como

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\rho (\delta \Gamma_{\nu\mu}{}^\rho) - \nabla_\nu (\delta \Gamma_{\rho\mu}{}^\rho), \quad (2.26)$$

e a variação  $\delta \sqrt{-g}$  é obtida a partir da seguinte propriedade:

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.27)$$

Inserindo-se (2.26) e (2.27) na expressão (2.23), vem

$$\delta S_{EH} = \frac{1}{2\kappa} \int_\Omega (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} d^4x [\nabla_\rho (\delta \Gamma_{\nu\mu}{}^\rho) - \nabla_\nu (\delta \Gamma_{\rho\mu}{}^\rho)]) + \int_\Omega d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right), \quad (2.28)$$

tal que rearranjando-se o primeiro termo de (2.28) e levando-se em conta que  $\nabla_\rho g^{\mu\nu} = 0$ , obtém-se

$$\delta S_{EH} = \frac{1}{2\kappa} \int_\Omega (\sqrt{-g} d^4x [\nabla_\rho (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\nu\mu}{}^\rho) - \nabla_\nu (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\rho\mu}{}^\rho)]) + \int_\Omega d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right). \quad (2.29)$$

Após realizar-se uma troca indicial  $\rho \leftrightarrow \nu$  no segundo termo da primeira integral acima, obtemos

$$\delta S_{EH} = \frac{1}{2\kappa} \int_\Omega (\sqrt{-g} d^4x \nabla_\rho (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\nu\mu}{}^\rho - g^{\mu\rho} \delta \Gamma_{\nu\mu}{}^\nu)) + \int_\Omega d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right). \quad (2.30)$$

A primeira integral de (2.30) pode ser calculada a partir do seguinte *teorema de Gauss covariante*:

$$\int_\Omega d^4x \sqrt{-g} \nabla_\xi u^\xi = \oint_{\partial\Omega} d^3x_\xi \sqrt{-g} u^\xi, \quad (2.31)$$

onde  $\partial\Omega$  é a fronteira de  $\Omega$ , e  $\sqrt{-g} d^3x_\xi$  é um elemento de hipersuperfície covariante.

Portanto,

$$\delta S_{EH} = \oint_{\partial\Omega} \frac{1}{2\kappa} \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\nu\mu}{}^\rho - g^{\mu\rho} \delta \Gamma_{\nu\mu}{}^\nu) d^3x_\mu + \frac{1}{2\kappa} \int_\Omega d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right). \quad (2.32)$$

Posto que a integral de superfície se anula na fronteira, a expressão (2.32) se reduz a

$$\delta S_{EH} = \frac{1}{2\kappa} \int_{\Omega} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.33)$$

Consideramos, a seguir, a variação da ação para a matéria

$$\delta S_M = \int_{\Omega} d^4x \delta(\mathcal{L}_m \sqrt{-g}), \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\Omega} d^4x \left( \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} + \mathcal{L}_m \delta \sqrt{-g} \right), \\ &= \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2} \mathcal{L}_m g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Como usualmente, define-se o tensor energia-momento

$$T_{\mu\nu} \equiv 2 \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} - \mathcal{L}_m g_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (2.36)$$

tal que

$$\delta S_M = \frac{1}{2} \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.37)$$

Então, aplicando agora o princípio da mínima ação para a ação total

$$\delta S = \delta S_{EH} + \delta S_M = 0, \quad (2.38)$$

escrevemos

$$\frac{1}{2\kappa} \int_{\Omega} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} = 0. \quad (2.39)$$

Para variações arbitrárias ( $\delta g^{\mu\nu}$ ), finalmente obtemos as equações de Einstein

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.40)$$

onde  $G_{\mu\nu}$  é o tensor de Einstein e  $T_{\mu\nu}$  é o tensor energia-momento, como antes.

As equações dadas em (2.40) representam quantitativamente o efeito da gravitação. A geometria do espaço-tempo é determinada pela distribuição de matéria-energia. O tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ , na sua forma mais geral, possui dez componentes independentes, o que proporciona um número de dez equações diferenciais parciais de segunda ordem (não-lineares e hiperbólicas) para a solução dos potenciais gravitacionais  $g_{\mu\nu}$ .

# Capítulo 3

## Cosmologia

### 3.1 Modelo de Friedmann-Robertson-Walker

Os dois princípios básicos utilizados para descrever a Cosmologia são: (i) a distribuição de matéria no Universo é homogênea e isotrópica em grande escala; (ii) em grande escala, a estrutura geométrica do universo é determinada por fenômenos gravitacionais, os quais são explicados pela teoria da gravitação Einsteiniana, segundo a qual, o princípio cosmológico descrito em (i) descreve a cinemática do universo enquanto que, em (ii), determina a dinâmica.

No modelo de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) utiliza-se uma métrica que é uma solução exata das equações de Einstein (2.40), e que descreve um universo homogêneo e isotrópico num estágio de expansão ou contração.

Consideremos o elemento de linha

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (3.1)$$

A métrica mais geral que satisfaz as condições de um universo homogêneo e isotrópico é da forma

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right], \quad (3.2)$$

a qual é escrita em um sistema de coordenadas comóveis (sistema de coordenadas que acompanha a expansão ou contração do universo). As componentes espaciais também dependem do tempo cósmico  $t$  devido ao fato que o fator de escala  $a(t)$  é uma função arbitrária de  $t$ . O parâmetro  $k$  pode assumir os valores  $k = 0, \pm 1$ . Se  $k = 0$ , a métrica

representa um espaço plano, para  $k > 0$  o espaço é esférico e se  $k < 0$  o espaço é dito ser hiperbólico.

## 3.2 Equações de Friedmann

As componentes não-nulas do símbolo de Christoffel, computadas a partir de (2.2) e com auxílio de (3.2), são

$$\begin{aligned}
\Gamma_{rr}{}^t &= a\dot{a}/(1 - kr^2), & \Gamma_{\theta\theta}{}^t &= a\dot{a}r^2, & \Gamma_{\phi\phi}{}^t &= a\dot{a}r^2\text{sen}^2\theta, \\
\Gamma_{tr}{}^t &= \Gamma_{rt}{}^r = \Gamma_{t\theta}{}^\theta = \Gamma_{\theta t}{}^\theta = \Gamma_{t\phi}{}^\phi = \Gamma_{\phi t}{}^\phi = \dot{a}/a, \\
\Gamma_{tr}{}^t &= \Gamma_{rt}{}^r = \Gamma_{t\theta}{}^\theta = \Gamma_{\theta t}{}^\theta = \Gamma_{t\phi}{}^\phi = \Gamma_{\phi t}{}^\phi = \dot{a}/a, \\
\Gamma_{\theta\theta}{}^r &= -r(1 - kr^2), & \Gamma_{\phi\phi}{}^r &= -r(1 - kr^2)\text{sen}^2\theta, \\
\Gamma_{r\theta}{}^\theta &= \Gamma_{\theta r}{}^\theta = \Gamma_{r\phi}{}^\phi = \Gamma_{\phi r}{}^\phi = 1/r, \\
\Gamma_{\phi\phi}{}^\theta &= -\text{sen}\theta \cos\theta & \Gamma_{\theta\phi}{}^\phi &= \Gamma_{\phi\theta}{}^\phi = \cot g\theta.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

As componentes do tensor de Ricci oriundas de (3.2), são dadas por

$$\begin{aligned}
R_{tt} &= -3\frac{\ddot{a}}{a}, \\
R_{rr} &= \frac{\ddot{a}a + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2}, \\
R_{\theta\theta} &= r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a} + 2k), \\
R_{\phi\phi} &= r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a} + 2k)\text{sen}^2\theta,
\end{aligned} \tag{3.4}$$

com o correspondente escalar de Ricci sendo expresso por

$$R = \frac{6}{a^2}(\ddot{a}a + \dot{a}^2 + k). \tag{3.5}$$

Iremos considerar um fluido perfeito como fonte nas equações de campo. Tal consideração é sustentada pelo princípio cosmológico mencionado em (i). Neste caso, o tensor energia-momento tem a seguinte representação:

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}, \tag{3.6}$$

com o traço dado por

$$T = g_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = T^\mu{}_\mu = -\rho + 3p, \quad (3.7)$$

onde  $\rho$  e  $p$  são a densidade de energia e pressão do fluido, respectivamente. Então, a equação (2.40) fornece duas equações independentes, conhecidas como *equações de Friedmann* e escritas como

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{k}{a^2}, \quad (3.8)$$

$$\dot{H} = -4\pi G(\rho + p) + \frac{k}{a^2}, \quad (3.9)$$

onde  $H = \dot{a}/a$  é o parâmetro de Hubble [30]. O valor atual de  $H$  [31] é dado por

$$H_0 = 100 h \text{ Km sec}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} = 2,1332 h \times 10^{-42} \text{ Gev}, \quad (3.10)$$

sendo  $h = 0,72 \pm 0,08$  a medida da incerteza de  $H_0$  [32].

O tensor energia-momento é conservado, o que nos leva à equação da continuidade

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (3.11)$$

Eliminando o termo  $k/a^2$  das equações (3.8) e (3.9) e, com auxílio de (3.11), obtemos

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \quad (3.12)$$

Podemos notar que a expansão acelerada ocorre para  $\rho + 3p < 0$ . Reescrevemos a equação (3.8) na forma

$$\Omega(t) - 1 = \frac{k}{(aH)^2}, \quad (3.13)$$

onde  $\Omega(t)$  é o parâmetro de densidade, dado por

$$\Omega(t) = \frac{\rho}{\rho_c}, \quad (3.14)$$

e  $\rho_c$  é a densidade crítica, a qual é expressa pela seguinte equação:

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (3.15)$$

Outro parâmetro importante em cosmologia é o chamado parâmetro de desaceleração  $q(t)$  [33], definido por

$$q(t) = -\frac{1}{H^2} \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2}. \quad (3.16)$$

Um valor negativo de  $q$  era previsto devido a expansão desacelerada do universo, dominada apenas pela matéria. Atualmente o valor de  $q$  é positivo, indicando uma expansão acelerada do universo.

A distribuição de matéria determina a geometria espacial de nosso universo. Portanto, podemos estabelecer as seguintes relações:

$$\begin{aligned}\Omega &> 1 \text{ ou } \rho > \rho_c \rightarrow k = +1, \\ \Omega &= 1 \text{ ou } \rho = \rho_c \rightarrow k = 0, \\ \Omega &< 1 \text{ ou } \rho < \rho_c \rightarrow k = -1.\end{aligned}\tag{3.17}$$

Algumas observações tem mostrado que em grande escala, o universo possui uma geometria espacialmente plana ( $\Omega \simeq 1$ ) [34]. Com isso, nos capítulos subsequentes, iremos utilizar a métrica de FRW com  $k = 0$ , ou seja,

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)d\mathbf{x}^2.$$

Pela conservação do tensor energia-momento

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0 = -\partial_0 \rho - 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p),\tag{3.18}$$

e considerando uma equação de estado do tipo barotrópica

$$p = w\rho,\tag{3.19}$$

na qual  $w$  é uma constante, podemos encontrar facilmente a *equação do fluido*

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1+w)\frac{\dot{a}}{a},\tag{3.20}$$

que é uma equação diferencial ordinária para  $\rho$  a qual, por integração, resulta em

$$\rho \propto a^{-3(1+w)}.\tag{3.21}$$

Exemplos tradicionais para o fluido cósmico são matéria, radiação e energia escura. Para  $w = 0$ , a era do universo é dominada por matéria. De acordo com a equação (3.21), a densidade de energia da matéria é

$$\rho_{mat} \propto a^{-3}.\tag{3.22}$$

Para o caso  $w = 1/3$  e, a densidade de energia da radiação é expressa por

$$\rho_{rad} \propto a^{-4}.\tag{3.23}$$

O caso  $w = -1$  representa a fase atual acelerada de nosso Universo, dominada pela energia escura. Logo, têm-se  $\rho_{vac} = cte$ .



### 3.3 Radiação Cós mica de Fundo

A radiação cósmica de fundo em microondas (RCFM) foi prevista inicialmente por Ralph Alpher, Robert Herman e George Gamow em 1948 e detectada pela primeira vez quase que por acidente em 1965 por Arno Penzias e Robert Woodrow Wilson do *Bell Telephone Laboratory* em New Jersey [35]. No mesmo ano, os pesquisadores Robert Dicke e Dave Wilkinson da equipe WMAP reportaram o significado cosmológico da (RCFM) [36].

Atualmente a configuração térmica da RCFM está na magnitude de 2,725 Kelvin, com ajustes quase que perfeitos em relação ao espectro de um corpo negro [37]. Embora essa radiação, apresente alto grau isotrópico no espaço, algumas anisotropias foram detectadas em temperaturas da ordem de  $10\mu K$  [38, 39, 40]. A RCFM é umas das grandes sustentações da teoria do Big-Bang. O momento posterior desta grande explosão culminou em uma rápida expansão acelerada do universo, denominada era inflacionária, a qual possui modelos tal como o "inflaton"[41].

Sabe-se que a medida que o universo se expandia, sua temperatura diminuía de modo inversamente proporcional ao fator de escala  $a$ . Combinando a Lei de Stefan-Boltzmann

$$\epsilon_{rad} \equiv \rho_{rad}c^2 = \frac{\pi^2 k_B^4 T^4}{15\hbar^3}, \quad (3.24)$$

com a equação (3.23), obtemos

$$T \propto \frac{1}{a}. \quad (3.25)$$

Portanto, os fótons já não portavam energia suficiente para ionizar os átomos. Assim, os primeiros átomos de hidrogênio foram se formando. Enquanto o universo se expandia, cessava-se a interação de fótons com a matéria, deste modo os fótons passaram a se propagar livremente pelo espaço, processo que denomina-se desacoplamento.

### 3.4 Matéria Escura

Quase todas as informações sobre os corpos celestes que chegam até nós são através de fótons. A maioria dos objetos são observados porque eles emitem luz. Em outros casos como, por exemplo, em algumas nebulosas, notamos regiões escuras devido à absorção da luz. Assim, a absorção e emissão de luz, nos permite traçar a configuração de matéria no

Universo. Tais medidas podem ir além da luz visível, isto é, infravermelho, raios X, raios  $\gamma$ , ultravioleta e rádio.

Atualmente os dados disponíveis indicam que os corpos astronômicos de natureza diferente emitem ou absorvem fótons de maneiras muito diferentes [42]. Os espectros de emissão de objetos podem auxiliar os astrônomos a entender a matéria em nosso universo. No entanto, as técnicas que envolvem espectros eletromagnéticos, não são suficientes para se detectar e estudar a matéria misteriosa, denominada *matéria escura*, pois essa componente não emite e nem absorve no espectro eletromagnético.

A percepção da presença de matéria escura é um sério problema que tanto a astronomia moderna quanto a cosmologia enfrentam. A primeira indicação para a possível presença de matéria escura veio do estudo da dinâmica de nossa galáxia. Em 1933, Fritz Zwicky [43] realizou medidas de *red-shift* de galáxias situadas no aglomerado de Coma, detectando que a velocidade de galáxias individuais com relação a velocidade média do aglomerado, eram muito maiores do que o esperado. Segundo Zwicky, a quantidade de matéria no aglomerado de galáxias deveria conter uma quantidade significativa de matéria escura.

Posteriormente, Rubin e Ford em 1970 [45], utilizando dados fotométricos, e Roberts e Rot em 1973 [46], utilizando dados de rádio, estudaram as curvas de rotação da galáxia M31 (Ândromeda) até uma distância de  $\sim 30$  kpc, concluindo que a velocidade de rotação aumentava lentamente com o aumento da distância do centro da galáxia, permanecendo aproximadamente constante ao longo de distâncias radiais entre 16-30 kpc.

A composição da matéria escura ainda enfrenta grandes desafios. Um caso particular sugere partículas do tipo massivas que interagem muito fracamente, conhecidas como WIMPs (*Weakly Interacting Massive Particles*). A interação de tais partículas com a matéria e radiação é quase nula, dificultando sua detecção. Algumas expectativas estão essencialmente voltadas para o LHC na busca de produção de partículas a partir de colisões hadrônicas. O FERMLAB também tem investido fortemente na pesquisa afim de detectar os WIMPs, a partir da utilização de semicondutores do tipo Germânio [47].

### 3.5 Expansão Acelerada do Universo

Em 1998, a partir de observações de Supernova Tipo Ia (SN Ia), dois grupos de Astrofísicos [48, 49] apontaram para um regime de expansão acelerada do Universo. A

componente de energia responsável por essa aceleração foi denominada energia escura. O fato é que a energia escura parece estar mais dominante sobre a força da gravidade, fazendo com que as galáxias se afastem uma das outras cada vez mais rápido.

A luz emitida por um objeto se propaga no universo, mostrando um espectro que se desloca para o vermelho em função da expansão do universo. Tal fenômeno é denominado *redshift* ( $z$ ), uma medida fundamental em Cosmologia. O comprimento de onda  $\lambda$  aumenta de maneira proporcional ao fator de escala  $a$ , segundo a relação

$$1 + z = \frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{a_0}{a}, \quad (3.26)$$

onde  $\lambda_0$  e  $a_0$  representam os valores na época atual.

Um bom método para medir distâncias em cosmologia é chamado de *distância de luminosidade*  $d_L$  de um objeto. Em um espaço-tempo de Minkowski, a luminosidade absoluta  $L_f$  da fonte e o fluxo de energia  $\mathcal{F}$  a uma distância  $d$  da fonte, estão relacionados através da seguinte expressão:

$$\mathcal{F} = \frac{L_f}{4\pi d^2}, \quad (3.27)$$

a qual podemos generalizar para um universo em expansão, obtendo a distância de luminosidade expressa por

$$d_L^2 = \frac{L_f}{4\pi\mathcal{F}}. \quad (3.28)$$

As fontes são conhecidas como Velas Padronizáveis, exemplos mais conhecidos destas são as chamadas Cefeidas e supernovas tipo IA, cujas luminosidades são de alta magnitude.

A distância de luminosidade é expressa como

$$d_L = (1 + z) \int_0^z \frac{dz}{H(z)}. \quad (3.29)$$

Assim, se medirmos a distância de luminosidade podemos obter a taxa de expansão do universo expressando a densidade de energia de todos os constituintes do universo em função do redshift, de acordo com

$$\rho = \sum_i \rho_i (a/a_0)^{-3(1+w_i)} = \sum_i \rho_i (1+z)^{3(1+w_i)}, \quad (3.30)$$

onde  $w_i$  e  $\rho_i$  denotam o parâmetro da equação de estado e a densidade de energia para cada constituinte, respectivamente. Da equação (3.8), o parâmetro de Hubble tem a seguinte forma:

$$H^2 = H_0^2 \sum_i \Omega_i^0 (1+z)^{3(1+w_i)}, \quad (3.31)$$

onde  $\Omega_i^0 \equiv 8\pi G \rho_i / 3H_0^2 = \rho_i / \rho_c$  é o parâmetro de densidade para algum constituinte na época atual.

### 3.6 Constante cosmológica $\Lambda$

Inicialmente, as equações de campo de Einstein não concordavam com o pensamento cosmológico da época, o qual defendia um Universo estático, finito e fechado. A teoria de Einstein previa um Universo em expansão ou em contração. Para ajustar sua teoria, Albert Einstein inseriu a chamada *constante cosmológica*  $\Lambda$ , a qual, como esperava-se, produziria uma força repulsiva associada com uma energia do vácuo que preencheria todo o universo.

Logo após os trabalhos de Einstein sobre a evolução do Universo, descobertas como o *redshift* (desvio para o vermelho) e as soluções relativísticas de De Sitter [50] para um universo em expansão, quebraram a hipótese de um universo estático. Atualmente, a constante cosmológica voltou ao cenário cósmico como candidata para a aceleração do Universo [51]. As equações de Einstein (2.40) são, então, reescritas como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}. \quad (3.32)$$

Vemos que a inserção da constante cosmológica não altera a conservação de energia-momento, pois o tensor de Einstein e o tensor energia-momento satisfazem as identidades de Bianchi. A relação  $\nabla_\lambda g^{\mu\nu} = 0$  também suporta tal inserção, tornando possível adicionar um termo linear em  $g_{\mu\nu}$ , ou seja, a constante cosmológica.

As equações de campo dadas em (3.32) podem ser escritas como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = -\kappa(T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^\Lambda), \quad (3.33)$$

onde

$$T_{\mu\nu}^\Lambda = \frac{\Lambda}{\kappa}g_{\mu\nu}, \quad (3.34)$$

é o tensor energia-momento da energia do vácuo. Podemos comparar esse tensor com o tensor energia-momento de um fluido perfeito, assim obtendo  $\rho_\Lambda = \Lambda/8\pi G$ , isto é, uma densidade de energia constante ( $\rho_\Lambda = cte$ ), a qual satisfaz uma equação de estado com  $w = -1$ .

A equação de Friedmann com constante cosmológica é expressa como

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3}. \quad (3.35)$$

Retomando a equação da aceleração dada em (3.12), ou seja,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p), \quad (3.36)$$

e notando que para  $\rho + 3p > 0$ , vê-se que  $d^2a/dt^2 < 0$  representa um regime desacelerado do universo enquanto que para  $\rho + 3p < 0$  tem-se que  $d^2a/dt^2 > 0$ , o que aponta para um regime de aceleração do universo.

Retornando à equação da continuidade (3.11), isto é,

$$\dot{\rho} + 3H(p + \rho) = 0,$$

e considerando o fato que a energia do vácuo é constante, verifica-se que a taxa temporal  $d\rho/dt$  na equação da continuidade é nula. Logo,

$$3H(p + \rho) = 0, \tag{3.37}$$

a qual implica que  $\rho_\Lambda = -p_\Lambda$ . Portanto, a equação (3.36) torna-se

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{8\pi G}{3}p_\Lambda = \frac{\Lambda}{3}, \tag{3.38}$$

onde a constante cosmológica corresponde à uma pressão negativa tal que a medida que o universo sofre uma expansão, sua densidade de energia se mantém constante.

Posto que o modelo  $\Lambda$ CDM concorda com os dados experimentais do WMAP [52], por exemplo, a constante cosmológica enfrenta dois principais problemas. Primeiramente, a densidade de energia da constante cosmológica exige um valor de  $\rho_\Lambda \simeq 10^{95} \text{Kg/m}^3$ , enquanto que o valor medido atualmente para essa densidade de energia em relação a densidade crítica atual, está em torno de  $\rho_\Lambda^0 \simeq 0,72\rho_c^0$ . Assim, o valor para a densidade de energia da constante cosmológica atual é da ordem de  $10^{-26} \text{Kg/m}^3$ , levando à seguinte discrepância:

$$\frac{\rho_\Lambda}{\rho_\Lambda^0} \simeq 10^{121}. \tag{3.39}$$

Tal discrepância é conhecida como *problema da constante cosmológica*.

O segundo problema, é que os valores da densidade de energia do vácuo e da densidade de matéria atual do Universo, parecem ser aproximadamente iguais, contradizendo a correspondente evolução do fator de escala. Esse é o *problema da coincidência cósmica*.

Algumas reinterpretações da constante cosmológica foram sugeridas. Dentre elas, podemos citar a constante cosmológica como: multiplicadores de Lagrange [53], constante de integração [54, 55], variável estocástica [56], interpretação antrópica da constante cosmológica [57, 58] ou até mesmo, uma interpretação probabilística da constante cosmológica [59].

### 3.7 Quintessência

Outro modelo simples que pode explicar a expansão acelerada, envolve um campo escalar como energia escura, chamado quintessência e denotado por  $\phi$ . Considerando um campo escalar do tipo homogêneo, ou seja,  $\phi(x, t) \simeq \phi(t)$ , poder-se-ia descrever a aceleração do fator de escala causada pela energia potencial do campo. Aqui, o campo escalar é minimamente acoplado à gravidade. Modelos com campo escalar minimamente acoplado ao campo gravitacional também podem ser estudados em [60, 61, 62, 63, 64, 65].

A ação para o modelo sob consideração é dada por

$$S = \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 - V(\phi) \right], \quad (3.40)$$

onde  $(\nabla\phi)^2 = g^{\mu\nu} \partial_{\mu}\phi \partial_{\nu}\phi$  e  $V(\phi)$  é o potencial do campo. Variando a ação (3.40) com respeito a  $\phi$ , obtemos a equação de Klein-Gordon para o campo escalar

$$\square\phi + \frac{dV}{d\phi} = 0, \quad (3.41)$$

a qual, quando posta na métrica plana de FRW, torna-se

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (3.42)$$

O tensor energia momento do campo é obtido pela variação da ação (3.40) em termos de  $g^{\mu\nu}$  bem como pela utilização da relação (2.36). Desse modo,

$$T_{\mu\nu}^{(\phi)} = \partial_{\mu}\phi \partial_{\nu}\phi + g_{\mu\nu} \left[ -\frac{1}{2} \partial_{\lambda}\phi \partial^{\lambda}\phi + V(\phi) \right]. \quad (3.43)$$

Utilizando a métrica de Friedmann-Robertson-Walker, nós obtemos a densidade de energia e pressão do campo escalar

$$\rho = T_0^0 = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad p = T_i^i = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi), \quad (3.44)$$

onde  $\dot{\phi}^2$  é a energia cinética. Então, das equações (3.8) e (3.9), temos

$$H^2 = \frac{-8\pi G}{3} \left[ \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right], \quad (3.45)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{8\pi G}{3} \left[ \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \right]. \quad (3.46)$$

A equação de estado para o campo escalar  $\phi$  é dada por

$$w_\phi = \frac{p}{\rho} = \frac{\dot{\phi}^2 - 2V(\phi)}{\dot{\phi}^2 + 2V(\phi)} = \frac{-1 + \dot{\phi}^2/2V(\phi)}{1 + \dot{\phi}^2/2V(\phi)}. \quad (3.47)$$

Se o campo escalar evolui lentamente, ou seja, se  $\dot{\phi}^2/2V \ll 1$ , então  $w_\phi \approx -1$  e, portanto, o campo escalar se comporta variando lentamente como a energia escura. Assim, a densidade da energia escura pode ser descrita em termos do potencial, isto é,  $\rho \simeq V[\phi(t)]$ . Em geral,  $w_\phi$  pode assumir qualquer valor entre  $-1$  ( evoluindo muito lentamente ) e  $+1$  ( evoluindo muito rapidamente ). No modelo de quintessência, os potenciais utilizados tradicionalmente são do tipo exponencial. Por outro lado, os modelos originais de quintessência adotam potenciais do tipo polinomial [66, 67].

Dentre outros modelos que envolvem campo escalar para descrever energia escura, são considerados a K-essência [68, 69], campos taquiônicos [70, 71, 72, 73], campos fantasmas (campo escalar com sinal negativo no termo cinético) [74, 75, 76, 77], gás de Chaplyng [78, 79] ou a combinação de quintessência com um campo fantasma em um modelo unificado chamado quintom [80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89].

# Capítulo 4

## Teorias $f(R)$

### 4.1 Introdução

Atualmente, o ramo da Cosmologia moderna se abasteceu de várias teorias gravitacionais para explicar um dos principais mistérios encontrados na física teórica atual, a saber, a aceleração do universo. Tais teorias objetivam estender a TRG. Dentre as principais teorias que portam uma sofisticada estrutura matemática, podemos citar a teoria de Einstein-Cartan (que envolve inserção de torção), teorias escalares-tensoriais, teorias de altas dimensões (cosmologia de branas), modelos  $f(R, R_{\alpha\beta}, \dots)$  os quais permitem termos adicionais de curvatura na densidade Lagrangeana, modelos topológicos e o modelo de TEVES (teorias tensoriais-escalares-vetoriais).

Nossa abordagem visa especificamente trabalhar com as teorias  $f(R)$ , ou seja, com teorias de gravidade modificadas. A função  $f(R)$  é arbitrária, e permite a ocorrência de termos invariantes na densidade Lagrangeana, possibilitando a construção de uma função  $f(R)$  que descreva o atual cenário aceleracional do Universo. Essencialmente, a modificação resultante nas equações de campo surge realizando-se uma generalização da ação de Einstein-Hilbert.

As equações de campo podem ser obtidas a partir do formalismo métrico, do formalismo de Palatini ou do formalismo métrico-afim. Como indicado anteriormente, no formalismo métrico o princípio variacional é aplicado variando-se apenas a métrica, tornando a conexão dependente. Como também dito anteriormente, no formalismo de Palatini a métrica e a conexão afim são tratadas independentemente e, no formalismo métrico-afim, a ação para a matéria torna-se dependente não apenas da métrica e do campo escalar



acoplado, mas também da conexão [61, 90].

## 4.2 Formalismo métrico

Uma questão pertinente quanto as prescrições do princípio variacional, qualquer que seja o contexto teórico de interesse, está na consideração dos termos de fronteiras quando se fixa a métrica e suas derivadas primeiras. O termo que é adicionado à ação de Einstein-Hilbert é chamado termo de fronteira de Gibbons-York-Hawking, terminologia devida aos desenvolvedores (métodos calculacionais detalhados podem ser encontrados em [91, 92, 93, 94]). A ação total no formalismo métrico é dada por

$$S_{métrico} = S_{EH} + S_M. \quad (4.1)$$

Escrevendo a ação total no formalismo métrico em termos de densidades Lagrangeanas para o campo gravitacional e para a matéria, tem-se

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} f(R) + \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_M(g_{\mu\nu}, \psi_M). \quad (4.2)$$

Primeiramente, vamos trabalhar com a variação do funcional de Einstein-Hilbert

$$\delta S_{EH} = \frac{1}{2\kappa} \int_{\Omega} d^4x [f(R)\delta\sqrt{-g} + \sqrt{-g}\delta f(R)], \quad (4.3)$$

onde a derivada funcional de  $f(R)$  é denotada por

$$\delta f(R) = f'(R)\delta R, \quad (4.4)$$

sendo  $f'(R) = df(R)/dR$ . Efetuando-se uma variação no escalar de Ricci

$$\delta R = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}, \quad (4.5)$$

e utilizando-se a expressão (2.26) para o termo  $\delta R_{\mu\nu}$ , podemos escrever a equação (4.5) como [95]

$$\delta R = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\square(\delta g^{\mu\nu}) - \nabla_{\mu}\nabla_{\nu}(\delta g^{\mu\nu}). \quad (4.6)$$

Agora, combinando a propriedade dada por (2.27) e inserindo a expressão (4.6) na ex-

pressão para  $\delta S_{EH}$ , obtemos

$$\begin{aligned}
& \delta S_{EH} \\
&= \frac{1}{2\kappa} \int_{\Omega} d^4x \left( -f(R) \frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g} f'(R) (R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \square \delta g^{\mu\nu} - \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} \delta g^{\mu\nu}) \right) \\
&= \frac{1}{2\kappa} \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} \left( f'(R) (\delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \square (\delta g^{\mu\nu}) - \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} (\delta g^{\mu\nu})) - f(R) \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \right).
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Integrando por partes o segundo e o terceiro termos de (4.7), vem (para maiores detalhes, ver [95])

$$\delta S_{EH} = \frac{1}{2\kappa} \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} \left( f'(R) R_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \square f'(R) - \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} f'(R) - f(R) \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu}. \tag{4.8}$$

Em seguida, utilizaremos a expressão da variação  $\delta S_M$  da ação para a matéria, computada via a expressão (2.37). Temos

$$\delta S_M = \frac{1}{2} \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \tag{4.9}$$

Logo, pelo princípio da mínima ação

$$\delta S_{métrico} = \delta S_{EH} + \delta S_M = 0, \tag{4.10}$$

e, portanto, para variações arbitrárias de  $g^{\mu\nu}$  no interior do volume do espaço-tempo considerado, obtemos as seguintes equações de campo generalizadas no formalismo métrico para o modelo de gravidade  $f(R)$ :

$$f'(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu} - [\nabla_{\mu} \nabla_{\nu} - g_{\mu\nu} \square] f'(R) = -\kappa T_{\mu\nu}, \tag{4.11}$$

onde  $\square \equiv \nabla^{\mu} \nabla_{\mu}$ .

Olhando as equações de campo (4.11), podemos notar que elas são equações diferenciais parciais de quarta ordem na métrica. Ao contrário das equações de Einstein, que são de segunda ordem, as teorias de gravidade  $f(R)$  métrica, correspondem às equações da RG quando  $f(R) = R$ . Outro ponto relevante está relacionado ao traço da equação (4.11). Ao contrário da gravitação de Einstein, a qual relaciona diretamente o escalar de Ricci com a matéria ( $R = \kappa T$ ), o traço da equação (4.11) produz equações diferenciais do tipo

$$f'(R) R - 2f(R) + 3\square f' = \kappa T, \tag{4.12}$$

as quais admitem um maior número de soluções.

## 4.2.1 Equações de Friedmann Generalizadas

Considerando a métrica FRW espacialmente plana

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a^2(t) d\mathbf{x}^2, \quad (4.13)$$

a componente temporal das equações de campo (4.11) produzem as equações de Friedmann generalizadas

$$H^2 - \frac{1}{3f'(R)} \left\{ \frac{1}{2}[f(R) - Rf'(R)] - 3H^2 \dot{R} f''(R) \right\} = \frac{1}{3} \kappa \rho, \quad (4.14)$$

enquanto que as componentes espaciais fornecem

$$2\dot{H} + H^2 + \frac{1}{f'(R)} \left\{ 2H\dot{R}f''(R) + \ddot{R}f''(R) + \dot{R}^2 f'''(R) - \frac{1}{2}[f(R) - Rf'(R)] \right\} = -\kappa p, \quad (4.15)$$

onde  $R$  é dado por

$$R = 6(\dot{H} + 2H^2). \quad (4.16)$$

A equação da aceleração generalizada é obtida a partir da combinação das equações (4.14) e (4.15). Tem-se

$$\dot{H} - \frac{1}{2f'(R)} \left\{ H\dot{R}f''(R) + \ddot{R}f''(R) + \dot{R}^2 f'''(R) - \frac{1}{3}[f(R) - Rf'(R)] \right\} = -\frac{\kappa}{6}(\rho + 3p). \quad (4.17)$$

Selecionando  $f(R) = R$ ,  $f'(R) = 1$  e  $f''(R) = f'''(R) = 0$ , as equações (4.14) e (4.17) obviamente se reduzem às equações padrões de Friedmann.

## 4.2.2 Expansão acelerada com termos $1/R$

Nesta subseção, iremos descrever as aplicações das teorias de gravidade modificadas no formalismo métrico. Para a fase de aceleração do universo, as teorias  $f(R)$  tem sido propostas para descrever a atual expansão acelerada, sem a necessidade de incluir a energia escura para esse cenário.

Definindo as quantidades

$$\rho_{e.escura} = \frac{1}{\kappa f'(R)} \left[ \frac{1}{2}[f(R) - Rf'(R)] - 3H\dot{R}f''(R) \right], \quad (4.18)$$

e

$$p_{e.escura} = \frac{1}{\kappa f'(R)} \left[ 2H\dot{R}f''(R) + \ddot{R}f''(R) + \dot{R}^2 f'''(R) - \frac{1}{2}[f'(R)R - f(R)] \right], \quad (4.19)$$

bem como usando as equações (4.14) e (4.17), obtemos

$$H^2 = \frac{1}{3}\kappa\rho_{efe}, \quad (4.20)$$

$$\dot{H} = -\frac{\kappa}{6}(\rho_{efe} + 3p_{efe}), \quad (4.21)$$

onde

$$\rho_{efe} = \rho + \rho_{e.escura}, \quad (4.22)$$

e

$$p_{efe} = p + p_{e.escura}. \quad (4.23)$$

Considerando o vácuo, isto é, apenas para a fase de aceleração do universo dominada pela energia escura, estabelecemos que  $p = 0$  e  $\rho = 0$ . Portanto, o parâmetro da equação de estado efetiva é dado por

$$w_{efe} = \frac{p_{efe}}{\rho_{efe}} = \frac{2H\dot{R}f''(R) + \ddot{R}f''(R) + \dot{R}^2 f'''(R) - \frac{1}{2}[f'(R)R - f(R)]}{\frac{1}{2}[f(R) - Rf'(R)] - 3H\dot{R}f''(R)}. \quad (4.24)$$

Observamos que a equação de estado efetiva que relaciona  $\rho_{e.escura}$  e  $p_{e.escura}$  depende da forma específica da função  $f(R)$ , de tal maneira que uma escolha adequada de  $w_{efe} = p_{e.escura}/\rho_{e.escura}$  poderá indicar um cenário de expansão acelerada do universo. Num modelo simples para o qual  $f(R) \propto R^n$ , tem-se

$$w_{efe} = -\frac{6n^2 - 7n - 1}{6n^2 - 9n + 3}, \quad (4.25)$$

com  $n \neq 1$ . Assumindo que o fator de escala é dado pela forma de potência genérica

$$a(t) = a_0(t/t_0)^\alpha, \quad (4.26)$$

obtemos a relação de  $\alpha$  e  $n$  a partir da seguinte expressão:

$$\alpha = \frac{-2n^2 + 3n - 1}{n - 2}. \quad (4.27)$$

Neste estágio, vemos que existe uma vasta classe de funções viáveis  $f(R)$ . A forma específica dessas funções produzem mudanças nas equações de estado, e manipulações mais rigorosas seriam necessárias para resolver as equações que governam a dinâmica do universo.

### 4.3 Formalismo de Palatini

No formalismo de Palatini, as equações de campo são obtidas a partir da variação da ação de Einstein-Hilbert com relação a métrica e conexão, mas levando-se em conta a independência destes objetos. Lembramos que agora o tensor de Ricci e o tensor de Riemann são objetos construídos a partir de uma conexão afim geral, como enfatizado no início de nossa dissertação.

A ação total em teorias de gravidade no formalismo de Palatini é dada por

$$S_{Palatini} = \frac{1}{2\kappa} \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} f(\mathcal{R}) + \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_M(g_{\mu\nu}, \psi_M). \quad (4.28)$$

Utilizando a relação [17]

$$\delta\mathcal{R}_{\mu\nu} = \bar{\nabla}_{\rho}(\delta\bar{\Gamma}_{\nu\mu}^{\rho}) - \bar{\nabla}_{\nu}(\delta\bar{\Gamma}_{\rho\mu}^{\rho}), \quad (4.29)$$

vê-se que a variação da ação (4.28) para a parte gravitacional com respeito à métrica e à conexão, respectivamente, pega a forma

$$\begin{aligned} \delta S_{Palatini} &= \frac{1}{2\kappa} \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} \left( f'(\mathcal{R})\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(\mathcal{R})g_{\mu\nu} + \kappa T_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} \\ &\quad + \frac{1}{2\kappa} \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} f'(\mathcal{R}) g^{\mu\nu} \left( \bar{\nabla}_{\rho} \delta\bar{\Gamma}_{\nu\mu}^{\rho} - \bar{\nabla}_{\nu} \delta\bar{\Gamma}_{\rho\mu}^{\rho} \right). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Como adotado no formalismo métrico, a integração por partes [95] na segunda linha da equação (4.30) fornece contribuições que se anulam na fronteira. Logo, a expressão rearranjada torna-se

$$\begin{aligned} \delta S_{Palatini} &= \frac{1}{2\kappa} \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} \left( f'(\mathcal{R})\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(\mathcal{R})g_{\mu\nu} + \kappa T_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} \\ &\quad + \frac{1}{2\kappa} \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} \left( [-\bar{\nabla}_{\rho}(\sqrt{-g}f'(\mathcal{R})g^{\mu\nu}) + \bar{\nabla}_{\sigma}(\sqrt{-g}f'(\mathcal{R})g^{\mu\sigma})\delta_{\rho}^{\nu}] \delta\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\rho} \right). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Como já é sábio, a definição (2.36)  $T_{\mu\nu} \equiv 2/\sqrt{-g}\delta S_M/\delta g^{\mu\nu}$  quando implementada em conjunção com o princípio de mínima ação para (4.31), faz com que as equações de campo no formalismo de Palatini em gravidade  $f(R)$  tornem-se

$$f'(\mathcal{R})\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(\mathcal{R})g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}, \quad (4.32)$$

$$-\bar{\nabla}_{\rho}(\sqrt{-g}f'(\mathcal{R})g^{\mu\nu}) + \bar{\nabla}_{\sigma}(\sqrt{-g}f'(\mathcal{R})g^{\sigma(\mu})\delta_{\rho}^{\nu}) = 0. \quad (4.33)$$

Analogamente ao formalismo métrico temos que, se  $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$ , o formalismo de Palatini reestabelece a TRG. Agora, tomando o traço da equação (4.32), segue que

$$f'(\mathcal{R})\mathcal{R} - 2f(\mathcal{R}) = \kappa T. \quad (4.34)$$

No caso de vácuo ou  $T = 0$ , obtemos (4.34)

$$f'(\mathcal{R})\mathcal{R} - 2f(\mathcal{R}) = 0. \quad (4.35)$$

Uma solução simples para esta equação [96] emerge quando  $f(\mathcal{R}) \propto \mathcal{R}^2$ . Notamos que, se tomarmos o traço da equação (4.33), obtemos

$$\bar{\nabla}_\rho(\sqrt{-g}f'(\mathcal{R})g^{\mu\nu}) = 0. \quad (4.36)$$

Assim, definindo a métrica conforme

$$h_{\mu\nu} \equiv f'(\mathcal{R})g^{\mu\nu}, \quad (4.37)$$

a conexão independente torna-se-á expressa como

$$\bar{\Gamma}_{\mu\nu}{}^\lambda = \frac{1}{2}h^{\lambda\rho}(\partial_\mu h_{\nu\rho} + \partial_\nu h_{\mu\rho} - \partial_\rho h_{\mu\nu}), \quad (4.38)$$

a qual pode ser escrita em termos de  $g_{\mu\nu}$  como segue

$$\Gamma_{\mu\nu}{}^\lambda = \frac{1}{2}\frac{1}{f'(\mathcal{R})}g^{\lambda\rho}[\partial_\mu(f'(\mathcal{R})g_{\nu\rho}) + \partial_\nu(f'(\mathcal{R})g_{\mu\rho}) - \partial_\rho(f'(\mathcal{R})g_{\mu\nu})]. \quad (4.39)$$

O tensor de Ricci sob uma transformação conforme, que obedece a relação (4.37), é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} + \frac{3}{2}\frac{1}{(f'(\mathcal{R}))^2}(\nabla_\mu f'(\mathcal{R}))(\nabla_\nu f'(\mathcal{R})) \\ &\quad - \frac{1}{f'(\mathcal{R})}\left(\nabla_\mu\nabla_\nu - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\square\right)f'(\mathcal{R}). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Contraindo esta última equação com  $g^{\mu\nu}$ , chegamos em

$$\mathcal{R} = R + \frac{3}{2}\frac{1}{(f'(\mathcal{R}))^2}\nabla_\mu f'(\mathcal{R})\nabla^\mu f'(\mathcal{R}) + \frac{3}{f'(\mathcal{R})}\square f'(\mathcal{R}). \quad (4.41)$$

Substituindo agora as expressões (4.41) e (4.40) em (4.34), após algumas manipulações, obtém-se

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= \frac{\kappa}{f'}T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\left(\mathcal{R} - \frac{f}{f'}\right) + \frac{1}{f'}(\nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\square)f' \\ &\quad - \frac{3}{2}\frac{1}{f'^2}(\nabla_\mu f')(\nabla_\nu f') - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\nabla f')^2. \end{aligned} \quad (4.42)$$

### 4.3.1 Equações de Friedmann Generalizadas

Em seguida, consideramos a gravitação no formalismo de Palatani e introduzimos as equações de Friedmann generalizadas. Utilizando a métrica de FRW e adotando o mesmo procedimento para o cálculo das componentes não nulas do tensor de Ricci, tanto no formalismo métrico em teorias  $f(R)$  quanto no formalismo métrico na TRG, obtemos as componentes  $(00)$  e  $(ij)$  do tensor de Ricci

$$\mathcal{R}_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{3}{2f'^2}(f')^2 - \frac{3}{2f'}\ddot{f}' - \frac{3}{2f'}H\dot{f}', \quad (4.43)$$

$$\mathcal{R}_{ij} = \left[ \frac{\ddot{a}}{a} + 2H^2 + \frac{5H}{2f'}\dot{f}' + \frac{\ddot{f}'}{2f'} \right] g_{ij}. \quad (4.44)$$

Inserindo as componentes expressas por (4.43) e (4.44) na equação de campo na abordagem de Palatini dada por (4.32), bem como utilizando a expressão do tensor energia-momento (3.7) para um fluido perfeito, obtemos para (4.43)

$$-3\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{3}{2f'^2}(f')^2 - \frac{3}{2f'}\ddot{f}' - \frac{3}{2f'}H\dot{f}' + \frac{f}{2f'} = \frac{\kappa\rho}{f'}, \quad (4.45)$$

enquanto que, para (4.44), tem-se

$$3\frac{\ddot{a}}{a} + 6H^2 + 15\frac{H}{2f'}\ddot{f}' - \frac{3}{2f'}\dot{f}' = \frac{3\kappa p}{f'}. \quad (4.46)$$

Portanto, somando as equações (4.45) e (4.46), chega-se na equação de Friedmann generalizada na abordagem de Palatini

$$\left( H + \frac{1}{2} \frac{\dot{f}'}{f'} \right)^2 = \frac{1}{6} \frac{\kappa(\rho + 3p)}{f'} + \frac{1}{6} \frac{f}{f'}. \quad (4.47)$$

No que segue, deixaremos a equação (4.47) em função dos parâmetros de densidade  $\Omega$  e em função do *red-shift* ( $z$ ). Vamos considerar um universo composto por um fluido cósmico sem pressão para a matéria ( $p_{mat} = 0$ ) e com a pressão de radiação dada pela equação de estado ( $p_{rad} = 1/3\rho_{rad}$ ), com  $\rho = \rho_{mat} + \rho_{rad}$  e  $p = p_{mat} + p_{rad}$ , onde  $\rho$  e  $p$  denotam a densidade total de energia e a pressão do fluido, respectivamente. Desta forma, o termo  $\kappa(\rho + 3p)$  da equação (4.47) torna-se

$$\kappa(\rho + 3p) = \kappa(\rho_{mat} + 2\rho_{rad}), \quad (4.48)$$

o qual, segundo a expressão (3.14), pode ser reescrito como

$$\kappa(\rho + 3p) = \kappa\rho_{crit}(\Omega_{mat} + 2\Omega_{rad}). \quad (4.49)$$

Utilizando a equação  $\rho = \rho_0(1+z)^{3(1+w)}$  para cada constituinte do universo, chegamos a

$$\rho_{mat} = \rho_{mat}^0(1+z)^3 \quad \text{e} \quad \rho_{rad} = \rho_{rad}^0(1+z)^4, \quad (4.50)$$

tal que, escrevendo a equação acima em termos dos parâmetros de densidade, conclui-se que

$$\rho_{mat} = \Omega_{mat}^0(1+z)^3\rho_{crit}^0, \quad (4.51)$$

e

$$\rho_{rad} = \Omega_{rad}^0(1+z)^4\rho_{crit}^0. \quad (4.52)$$

Portanto, a equação (4.48) torna-se

$$\kappa(\rho + 3p) = 3\Omega_{mat}^0(1+z)^3H_0^2 + 6\Omega_{rad}^0(1+z)^4H_0^2. \quad (4.53)$$

Em adição, substituindo a expressão acima em (4.47), ficamos com

$$\left(H + \frac{1}{2}\frac{\dot{f}'}{f'}\right)^2 = \frac{H_0^2}{6f'} \left(3\Omega_{mat}^0(1+z)^3 + 6\Omega_{rad}^0(1+z)^4 + \frac{f}{H_0^2}\right), \quad (4.54)$$

que é a equação de Friedmann generalizada em função do *red-shift*, para gravidade modificada na abordagem de Palatini.

## 4.4 Formalismo métrico-afim

Dentre os formalismos que podem originar as equações de campo em teorias modificadas da gravidade, vale a pena abordar de forma sucinta o formalismo métrico-afim em teorias  $f(R)$ . Este terceiro método para manipular a variação da ação, é conhecido como o formalismo métrico-afim. Neste formalismo, a ação para a matéria não depende apenas da métrica  $g_{\mu\nu}$  e do campo  $\psi$ , mas também da conexão.

Neste contexto, a conexão já não é mais puramente Christoffeliana. Deste modo, definimos um objeto chamado tensor de torção de Cartan, que consiste da parte anti-simétrica de uma conexão geral. Deste ponto de vista, o espaço-tempo de Riemann-Cartan é uma variedade diferenciável de quatro dimensões equipada com um tensor métrico  $g_{\mu\nu}$



e com uma conexão  $\bar{\Gamma}_{[\mu\nu]}^\lambda$  que é compatível com a métrica. O chamado tensor de torção [97] é definido por

$$S_{[\mu\nu]}^\lambda = \frac{1}{2} \left( \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda - \bar{\Gamma}_{\nu\mu}^\lambda \right). \quad (4.55)$$

Posto que a conexão é compatível com a métrica, a conexão pode ser escrita como

$$\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - C_{\mu\nu}^\lambda, \quad (4.56)$$

onde  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  são os símbolos de Christoffel, e  $C_{\mu\nu}^\lambda$  é o tensor de contorção [98], o qual é dado em termos do tensor de torção através da seguinte relação:

$$C_{\mu\nu}^\lambda = -S_{\mu\nu}^\lambda + S_{\mu}^\lambda{}_\nu - S^\lambda{}_{\mu\nu}. \quad (4.57)$$

A equação da geodésica associada à um vetor transportado paralelamente ao longo de uma curva é dada por

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\rho^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\rho} \frac{dx^\nu}{d\rho} - C_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\rho} \frac{dx^\nu}{d\rho} = 0. \quad (4.58)$$

É óbvio que a equação (4.58) torna-se a equação da geodésica tradicional se o tensor de contorção for nulo, isto é, se  $C_{\mu\nu}^\lambda = 0$ .

#### 4.4.1 Ação e Equações de campo

A ação integral para o modelo no formalismo métrico-afim é expressa por

$$S_{ma} = \frac{1}{2\kappa} \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} f(\mathcal{R}) + S_M(g_{\mu\nu}, \Gamma_{\mu\nu}^\lambda, \psi), \quad (4.59)$$

com  $S_g$  sendo a parte gravitacional a qual é dada por

$$S_G = \frac{1}{2\kappa} \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} f(\mathcal{R}), \quad (4.60)$$

e  $S_M$  é a ação para a matéria. O princípio da mínima ação nos diz que

$$0 = \delta S_{ma} = \delta S_G + \delta S_M, \quad (4.61)$$

tal que, considerando inicialmente a variação da parte gravitacional, obtemos

$$\begin{aligned}
\delta S_G &= \frac{1}{2\kappa} \int_{\Omega} d^4x \delta(\sqrt{-g} f(\mathcal{R})) \\
&= \frac{1}{2\kappa} \int_{\Omega} d^4x (f(\mathcal{R}) \delta\sqrt{-g} + \sqrt{-g} f'(\mathcal{R}) \delta\mathcal{R}) \\
&= \frac{1}{2\kappa} \int_{\Omega} d^4x (f(\mathcal{R}) \delta\sqrt{-g} + \sqrt{-g} f'(\mathcal{R}) \delta(g^{\mu\nu} \mathcal{R}_{\mu\nu})) \\
&= \frac{1}{2\kappa} \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} \left( f'(\mathcal{R}) \mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(\mathcal{R}) g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} \\
&\quad + \frac{1}{2\kappa} \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} f'(\mathcal{R}) g^{\mu\nu} \delta \mathcal{R}_{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{4.62}$$

Agora, a variação para o tensor de Ricci é dada pela seguinte relação:

$$\delta \mathcal{R}_{\mu\nu} = \bar{\nabla}_{\lambda} \delta \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} - \bar{\nabla}_{\nu} \delta \bar{\Gamma}_{\mu\lambda}^{\lambda} + 2 \bar{\Gamma}_{[\nu\lambda]}^{\sigma} \delta \bar{\Gamma}_{\mu\sigma}^{\lambda}. \tag{4.63}$$

Assim, inserindo a equação (4.62) na parte da ação gravitacional dada em (4.63), obtemos

$$\begin{aligned}
\delta S_G &= \frac{1}{2\kappa} \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} \left( f'(\mathcal{R}) \mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(\mathcal{R}) g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} \\
&\quad + \frac{1}{2\kappa} \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} f'(\mathcal{R}) g^{\mu\nu} \left( \bar{\nabla}_{\lambda} \delta \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} - \bar{\nabla}_{\nu} \delta \bar{\Gamma}_{\mu\lambda}^{\lambda} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2\kappa} \int_{\Omega} d^4x 2 \sqrt{-g} f'(\mathcal{R}) g^{\mu\sigma} \bar{\Gamma}_{[\sigma\lambda]}^{\nu} \delta \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda}.
\end{aligned} \tag{4.64}$$

Integrando por partes o termo da segunda linha da equação (4.64), vem [17]

$$\begin{aligned}
\delta S_G &= \frac{1}{2\kappa} \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} \left( f'(\mathcal{R}) \mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(\mathcal{R}) g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} \\
&\quad + \frac{1}{2\kappa} \int_{\Omega} d^4x \left[ -\bar{\nabla}_{\lambda} (\sqrt{-g} f'(\mathcal{R}) g^{\mu\nu}) + \bar{\nabla}_{\sigma} (\sqrt{-g} f'(\mathcal{R}) g^{\mu\sigma}) \delta_{\lambda}^{\nu} \right] \delta \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} \\
&\quad + \frac{1}{2\kappa} \int_{\Omega} d^4x \left[ 2 f'(\mathcal{R}) \left( g^{\mu\nu} \bar{\Gamma}_{[\lambda\sigma]}^{\sigma} - g^{\mu\rho} \bar{\Gamma}_{[\rho\sigma]}^{\sigma} \delta_{\lambda}^{\nu} + g^{\mu\sigma} \bar{\Gamma}_{[\sigma\lambda]}^{\nu} \right) \right] \delta \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda}.
\end{aligned} \tag{4.65}$$

A última contribuição da expressão (4.65) também contém os termos de superfície, os quais podem ser recuperados a partir de uma integral de volume, posto que  $\delta \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda}$  são nulos na fronteira. Levando-se em conta que as duas últimas integrais da equação (4.65) se anulam, e devido ao fato que  $\delta \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} = 0$  na fronteira [17], conclui-se que a variação da parte gravitacional é dada por

$$\delta S_G = \frac{1}{2\kappa} \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} \left( f'(\mathcal{R}) \mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(\mathcal{R}) g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu}. \tag{4.66}$$

Em seguida, consideramos a variação da ação para a matéria

$$\delta S_M = \int_{\Omega} d^4x \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \int_{\Omega} d^4x \frac{\delta S_M}{\delta \bar{\Gamma}_{\mu\nu}{}^{\lambda}} \delta \bar{\Gamma}_{\mu\nu}{}^{\lambda}. \quad (4.67)$$

O tensor energia-momento é ainda dado por

$$T_{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (4.68)$$

enquanto que o chamado tensor hipermomento é definido como [99]

$$\Delta_{\lambda}{}^{\mu\nu} \equiv \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta \bar{\Gamma}_{\mu\nu}{}^{\lambda}}. \quad (4.69)$$

O tensor hipermomento é obtido através da variação da ação para a matéria com relação às conexões. Portanto, a variação da ação para a matéria é

$$\delta S_M = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} \left[ T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \Delta_{\lambda}{}^{\mu\nu} \delta \bar{\Gamma}_{\mu\nu}{}^{\lambda} \right]. \quad (4.70)$$

No contexto sob consideração, pegamos as variações estabelecidas em (4.66) e (4.70), e subsequentemente aplicamos o princípio de Hamilton para obter as equações de campo no formalismo métrico-afim. Tem-se, então,

$$f'(\mathcal{R}) \mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(\mathcal{R}) g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}, \quad (4.71)$$

e

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{-g}} \left[ -\bar{\nabla}_{\lambda} (\sqrt{-g} f'(\mathcal{R}) g^{\mu\nu}) + \bar{\nabla}_{\sigma} (\sqrt{-g} f'(\mathcal{R}) g^{\mu\sigma}) \delta_{\lambda}^{\nu} \right] \\ & + 2f'(\mathcal{R}) \left( g^{\mu\nu} \bar{\Gamma}_{[\lambda\sigma]}{}^{\sigma} - g^{\mu\rho} \bar{\Gamma}_{[\rho\sigma]}{}^{\sigma} \delta_{\lambda}^{\nu} + g^{\mu\sigma} \bar{\Gamma}_{[\sigma\lambda]}{}^{\nu} \right) = \kappa \Delta_{\lambda}{}^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Utilizando o tensor de torção dado pela equação (4.56), podemos realçar a presença de torção na equação (4.72) reescrevendo-a do seguinte modo:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{-g}} \left[ -\bar{\nabla}_{\lambda} (\sqrt{-g} f'(\mathcal{R}) g^{\mu\nu}) + \bar{\nabla}_{\sigma} (\sqrt{-g} f'(\mathcal{R}) g^{\mu\sigma}) \delta_{\lambda}^{\nu} \right] \\ & + 2f'(\mathcal{R}) (g^{\mu\nu} S_{\lambda\sigma}{}^{\sigma} - g^{\mu\rho} S_{\rho\sigma}{}^{\sigma} \delta_{\lambda}^{\nu} + g^{\mu\sigma} S_{\sigma\lambda}{}^{\nu}) = \kappa \Delta_{\lambda}{}^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4.73)$$

As equações de campo dadas por (4.73) implicam que na teoria de gravidade modificada no formalismo métrico-afim [100, 101, 102, 103], alguns campos de matéria podem ser acoplados de uma forma mais natural. Como exemplo, podemos citar os campos fermiônicos descritos pela teoria relativística de Dirac para partículas de spin 1/2. Desde

que o tensor energia-momento de um campo de Dirac não é simétrico, quando se trabalha com tais campos acoplados à gravidade, depara-se com uma situação um tanto mais complicada, já que o tensor energia-momento expresso nas equações de campo da TRG é simétrico. Nesse contexto fermiônico, pode se esperar que em algum regime de energia, o spin das partículas possa interagir com a geometria do espaço-tempo, de tal modo que a torção poderia surgir naturalmente. Essa fenomenologia é descrita pela teoria de Einstein-Cartan e não pela TRG.

# Capítulo 5

## Gravidade Maxwell- $f(R)$ via acoplamento mínimo

### 5.1 Introdução

A teoria de Einstein-Maxwell forma a base para outras teorias eletro-gravitacionais. A teoria de Einstein-Maxwell, surge a partir da ação da teoria gravitacional de Einstein-Hilbert juntamente com a ação de Maxwell. A teoria também fornece equações que são de segunda ordem nas derivadas da métrica, ao contrário das teorias de ordem superior, onde a Lagrangeana pertinente contém termos de curvatura genéricos, como por exemplo, Gauss-Bonnet ou teorias  $f(R)$  propriamente ditas. A teoria de Einstein-Maxwell é linear na eletrodinâmica, apresentando na Lagrangeana de Maxwell um termo quadrático no tensor de campo eletromagnético.

Assim, como em outros acoplamentos, no que concerne às densidades Lagrangeanas, as teorias eletro-gravitacionais podem ter um campo minimamente acoplado ou não-minimamente acoplado. Ainda pode-se ter uma outra caracterização de tais acoplamentos, casos em que a Eletrodinâmica é linear ou não linear.

Neste capítulo, nós apresentamos um modelo em que um campo eletromagnético é minimamente acoplado ao campo gravitacional que envolve uma função genérica do invariante de Ricci. A seguir, adotaremos o formalismo métrico para a obtenção das equações de campo pertinentes.

## 5.2 Ação e equações de campo

Partimos do funcional ação

$$S = S_{f(R)} + S_{em} = \frac{1}{16\pi G} \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} f(R) - \frac{1}{16\pi} \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (5.1)$$

onde o primeiro termo em (5.1) representa a ação modificada de Einstein-Hilbert envolvendo gravidade  $f(R)$ , e o segundo termo é a Lagrangeana eletromagnética acoplada minimamente à gravidade  $f(R)$ . A equação (5.1) satisfaz a teoria de Einstein-Maxwell tradicional quando  $f(R) = R$ .

A ação eletromagnética é construída com o escalar  $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ , onde  $F_{\mu\nu}$  é o tensor de campo eletromagnético o qual é escrito como o rotacional covariante

$$F_{\mu\nu} = \nabla_{\mu} A_{\nu} - \nabla_{\nu} A_{\mu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}, \quad (5.2)$$

com  $A_{\mu}$  sendo o potencial de gauge. A expressão em termos de derivadas parciais de (5.2) é legítima pois  $F_{\mu\nu}$  é um tensor antissimétrico e  $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{(\mu\nu)}^{\lambda}$  aqui. Portanto, aplicam as propriedades de simetrias universais dadas, por exemplo, em [104].

Variando a ação (5.1) com relação à  $A_{\mu}$  e mantendo  $g_{\mu\nu}$  fixo, vê-se que a parte em  $f(R)$  não sofre tal variação. Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\delta S_{em}}{\delta A_{\mu}} &= -\frac{1}{16\pi} \int_{\Omega} d^4x \delta(\sqrt{-g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \\ &= -\frac{1}{16\pi} \int_{\Omega} d^4x \delta F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \sqrt{-g} + \delta F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \sqrt{-g} \\ &= -\frac{1}{16\pi} \int_{\Omega} d^4x \delta F_{\mu\nu} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} \sqrt{-g} + F_{\mu\nu} \delta(g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma} F_{\lambda\sigma}) \sqrt{-g} \\ &= -\frac{1}{16\pi} \int_{\Omega} d^4x \delta F_{\mu\nu} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} \sqrt{-g} + F_{\mu\nu} g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma} \delta F_{\lambda\sigma} \sqrt{-g}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Efetuando-se uma substituição adequada na expressão acima, vem

$$\frac{\delta S_{em}}{\delta A_{\mu}} = -\frac{1}{16\pi} \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} (2F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu}). \quad (5.4)$$

Utilizando agora a definição do bivector de Maxwell em termos dos potenciais de gauge juntamente com

$$\begin{aligned} \frac{\delta S_{em}}{\delta A_{\mu}} &= -\frac{1}{16\pi} \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} 2F^{\mu\nu} \delta(\partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}) \\ &= -\frac{1}{16\pi} \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} F^{\mu\nu} \partial_{\mu} \delta A_{\nu} - F^{\mu\nu} \partial_{\nu} \delta A_{\mu}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

e fazendo uma permutação indicial adequada, bem como levando em conta que  $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ , conclui-se que a expressão (5.5) torna-se

$$\frac{\delta S_{em}}{\delta A_\mu} = -\frac{1}{16\pi} \int_\Omega d^4x \sqrt{-g} 2F^{\mu\nu} \partial_\nu \delta A_\mu. \quad (5.6)$$

Então, integrando por partes a expressão (5.6), resulta

$$-\frac{1}{16\pi} \int_\Omega d^4x \sqrt{-g} 2F^{\mu\nu} \partial_\nu \delta A_\mu = -\frac{1}{8\pi} \int_{\partial\Omega} d^3x_\mu \sqrt{-g} F^{\mu\nu} \delta A_\mu + \frac{1}{8\pi} \int_\Omega \delta A_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} d^4x \sqrt{-g}, \quad (5.7)$$

onde  $d^3x_\mu = \frac{1}{3!} e_{\mu\nu\lambda\sigma} dx^\nu \wedge dx^\lambda \wedge dx^\sigma$  e  $e_{\mu\nu\lambda\sigma}$  é o pseudo tensor de Levi-Civita. A primeira integral do lado direito de (5.7) é aniquilada, pois os  $A_\mu$  são variacionalmente fixados na fronteira da região espaço-temporal em questão. Portanto,

$$-\frac{1}{16\pi} \int_\Omega d^4x \sqrt{-g} 2F^{\mu\nu} \partial_\nu \delta A_\mu = \frac{1}{8\pi} \int_\Omega \delta A_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} d^4x \sqrt{-g}, \quad (5.8)$$

tal que aplicando o princípio da mínima ação e considerando variações arbitrárias dos  $A_\mu$ , chegamos a

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu (\sqrt{-g} F^{\mu\nu}) = 0, \quad (5.9)$$

a qual pode ser escrita como

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = 0. \quad (5.10)$$

Agora, tomamos a variação da ação (5.1) com respeito a  $g_{\mu\nu}$ , mantendo  $A_\mu$  constante (logo  $F_{\mu\nu}$  é constante), para obter a expressão

$$\begin{aligned} \delta S_{Em} &= -\frac{1}{16\pi} \int_\Omega d^4x \delta(\sqrt{-g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \\ &= -\frac{1}{16\pi} \int_\Omega d^4x \delta\sqrt{-g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \delta F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \sqrt{-g} \\ &= -\frac{1}{16\pi} \int_\Omega d^4x \delta\sqrt{-g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + F_{\mu\nu} F_{\lambda\sigma} \sqrt{-g} \delta(g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma}) \\ &= -\frac{1}{16\pi} \int_\Omega d^4x \left( \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} g^{\rho\tau} \sqrt{-g} \delta g_{\rho\tau} - 2F_{\mu\nu} F_{\lambda\sigma} \sqrt{-g} g^{\mu\rho} g^{\lambda\tau} g^{\nu\sigma} \delta g_{\rho\tau} \right) \\ &= -\frac{1}{16\pi} \int_\Omega d^4x \left( \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} g^{\rho\tau} - 2F^\rho{}_\nu F^{\tau\nu} \right) \sqrt{-g} \delta g_{\rho\tau}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

a qual, quando comparada com (2.36), nos leva ao seguinte tensor para o campo eletromagnético:

$$T_{\mu\nu}^{em} = \frac{1}{4\pi} (g^{\alpha\beta} F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}). \quad (5.12)$$

Em (5.12), a componente  $T_{00}$  é a densidade de energia dos campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ , dada por

$$T_{00} = \frac{1}{8\pi}(E^2 + B^2), \quad (5.13)$$

e

$$T_{01} = E^2 B^3 - E^3 B^2. \quad (5.14)$$

Deste modo, as componentes  $T_{0k}$  constituem o vetor de Poynting, fornecendo a taxa do fluxo de energia através de  $\partial\Omega$ .

De acordo com a equação (4.11), a variação da ação  $S_{f(R)}$  dada em (5.1) com relação a  $g_{\mu\nu}$  produz

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - [\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square] f'(R) = -\kappa T_{\mu\nu}. \quad (5.15)$$

Também podemos escrever a equação acima, considerando o acoplamento eletromagnético via a variação da ação com relação a  $g_{\mu\nu}$  estabelecida em (5.11), o que nos dá

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = -\kappa \left( \frac{T_{\mu\nu}^{em}}{f'(R)} + T_{\mu\nu}^{curv} \right), \quad (5.16)$$

com  $T_{\mu\nu}^{curv}$  denotando a contribuição oriunda da curvatura. Aqui,  $T_{\mu\nu}^{curv}$  é definido como

$$T_{\mu\nu}^{curv} = \frac{1}{f'(R)} \left[ \frac{1}{2}g_{\mu\nu} [f(R) - Rf'(R)] + f'(R)(\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square) \right]. \quad (5.17)$$

### 5.3 Equações de Friedmann-Maxwell- $f(R)$

Considerando um espaço-tempo espacialmente plano com a métrica FWR nas equações de campo dadas por (5.16), a componente temporal é dada por

$$3H^2 = \frac{\kappa}{f'(R)} \left[ \frac{1}{2}(f'(R)R - f(R)) - 3H\dot{R}f''(R) + \frac{1}{4\pi}(g^{\alpha\beta}F_{0\alpha}F_{0\beta} - \frac{1}{4}g_{00}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}) \right], \quad (5.18)$$

enquanto que as componentes espaço-espaço são

$$2\dot{H} + H^2 = -\frac{\kappa}{f'(R)} \left[ 2H\dot{R}f''(R) + \ddot{R}f''(R) + \dot{R}^2 f'''(R) - \frac{1}{2}[f'(R)R - f(R)] + T_{ii}^{em} \right], \quad (5.19)$$

onde

$$\rho_{tot} = \frac{1}{\kappa f'(R)} \left[ \frac{1}{2}[f(R) - Rf'(R)] - 3H\dot{R}f''(R) + \frac{1}{4\pi}(g^{\alpha\beta}F_{0\alpha}F_{0\beta} - \frac{1}{4}g_{00}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}) \right], \quad (5.20)$$



e

$$p_{tot} = \frac{1}{\kappa f'(R)} \left[ 2H\dot{R}f''(R) + \ddot{R}f''(R) + \dot{R}^2 f'''(R) - \frac{1}{2}[f'(R)R - f(R)] + T_{ii}^{em} \right], \quad (5.21)$$

com  $\rho_{tot} = \rho_{curv} + \rho_{rad}$  e  $p_{tot} = p_{curv} + p_{rad}$ .

Podemos notar que as equações para a densidade de energia total e para a pressão total, contém a parte de curvatura oriunda da ação das  $f(R)$  e a parte de radiação oriunda da ação de Maxwell. O modelo acima estabelece que tanto a densidade como a pressão, portam uma parte do tensor energia momento eletromagnético, a qual nós interpretamos como oriunda da radiação cósmica de fundo em microondas. A partir das equações dadas em (5.20) e (5.21), é possível obter o parâmetro da equação de estado

$$w_{tot} = \frac{p_{tot}}{\rho_{tot}}. \quad (5.22)$$

Com efeito,

$$w_{tot} = \frac{2H\dot{R}f''(R) + \ddot{R}f''(R) + \dot{R}^2 f'''(R) - \frac{1}{2}[f'(R)R - f(R)] + T_{ii}^{em}}{\frac{1}{2}[f(R) - Rf'(R)] - 3H\dot{R}f''(R) + \frac{1}{4\pi}(g^{\alpha\beta}F_{0\alpha}F_{0\beta} - \frac{1}{4}g_{00}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta})}. \quad (5.23)$$

onde  $T_{ii}^{em}$  são as componentes da pressão isotrópica. Podemos notar que quando  $f(R) = R$  e, considerando o tensor energia-momento dado em [105], tem-se  $w_{tot} = 1/3$ .

Diante da equação acima (5.23), torna-se possível estabelecer um ajuste do parâmetro da equação de estado para a teoria Maxwell- $f(R)$ , em relação aos valores que identificam tal equação para um regime de aceleração do Universo. Nota-se que a equação de estado depende de uma forma específica da função  $f(R)$ . Um de nossos objetivos em trabalhos futuros, é manipular modelos adequados de funções  $f(R)$ , através de soluções analíticas e/ou numéricas das equações que governam a dinâmica do universo.

# Capítulo 6

## Conclusões e perspectivas futuras

A partir das abordagens realizadas nesta dissertação, podemos observar que há diversas maneiras para se investigar a evolução do universo. Teorias  $f(R)$  podem representar o quadro atual para o universo. Tal modelo possui características que generalizam a TRG, a qual nos permite descrever a aceleração cósmica sem a necessidade da inserção de componentes exóticas, como matéria e energia escuras. Daí, segue que tais generalizações das equações de Friedmann, sejam elas em qualquer formalismo pertencente às classes  $f(R)$ , possibilitam construir um funcional específico, sejam eles com parâmetros livres ou com uma forma da função  $f(R)$  já posta explicitamente.

Nosso objetivo em trabalhos futuros é desenvolver um estudo mais acurado para as classes  $f(R)$ . O interesse reside também em gravidade  $f(R)$ , dentro de um subcontexto da cosmologia torcional. Como vimos, o método exibido aqui o qual foi designado como formalismo métrico-afim, se apresenta como um método que propicia uma teoria gravitacional mais geral.

Outros interesses também podem ser promissores, como teorias  $f(R)$  contextualizadas em cosmologia de branas, as quais interpretam nosso universo como uma brana. Nesse modelo, assume-se que os campos de matéria estão confinados na brana, enquanto que os grávitons podem escapar da brana e se propagar livremente pelo "*bulk*"[106, 107], produzindo efeitos de vazamento de gravidade entre os universos. Tais efeitos ainda são especulativos para uma conexão com a fenomenologia da aceleração cósmica.

# Bibliografia

- [1] Riess, A. G. et al., *Astrophys. J.*, **607**, (2004).
- [2] Tegmark, M. et al., *Astrophys. J.*, **606**, (2004).
- [3] Spergel, D. N. et al., *Astrophys. J. Suppl.*, **148**, (2003).
- [4] Perlmutter S., et al., *Astrophys. J.*, **517**, (1999).
- [5] Lange A. E., et al., *Phys. Rev., D* **63**, (2001).
- [6] Hoekstra H., Yee H. K. C., Gladders M. D., *Astrophys. J.*, **577**, (2002).
- [7] Cole S., et al., *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **362**, (2005).
- [8] Astier P., et al., *Astron. Astrophys.*, **447**, (2006).
- [9] Weinberg, S., *Rev. Mod. Phys.*, **61**, (1989).
- [10] P. G. Ferreira and M. Joyce, *Phys. Rev. D* **58**, (1998).
- [11] Linder E. V., *Phys. Rev., D* **70**, (2004).
- [12] Simpson F., Bridle S., *Phys. Rev., D* **73**, (2006).
- [13] S. Carroll, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*, Addison Wesley, (2003).
- [14] Misner, C. W., Thorne, Kip S. and Wheeler, J. A., *Gravitation*, W. H. Freeman and Company, (1973).
- [15] A. Kehagias, K. Tamvakis *Phys. Lett. B* **515** (2001).

- [16] M. P. Hobson, G. P. Efstathiou and A. N. Lasenby, *General Relativity : An Introduction for Physicists*, Cambridge University Press, (2006).
- [17] E. Schrodinger, *Space-Time Structure*, Cambridge University Press, Cambridge, (1950).
- [18] Tamanini, N. and Contaldi, Carlo R., *Phys. Rev. D* **83** , (2011).
- [19] Faraoni, V. and Lanahan-Tremblay, N. , *Phys.Rev. D* **77**, (2008).
- [20] Faraoni, V. *Class. Quantum Grav.* **26**, (2009).
- [21] Gasperini, M. & Veneziano, G., *Phys. Lett., B* **277**, (1992).
- [22] Buchbinder, I. L., Odintsov, S. D., & Shapiro, I. L., *Effective action in quantum gravity* (Bristol: Institute of Physics Publ.) (1992).
- [23] Chiba T, Smith, Tristan L. and Erickcek, Adrienne L., *Phys. Rev. D* **75** (2007).
- [24] Kang, Jin U and s Panotopoulos G. *Phys. Lett. B* **677**, (2009).
- [25] Eingorn M. and Zhuk A. *Phys. Rev. D* **84**, (2011).
- [26] Sáez, D. Gómez *Journal of Physics: Conference Series* **229**, (2010).
- [27] Friedrich W. Hehl *et. al.* *Rev. Mod. Phys.* **48**, (1976).
- [28] Clemence, G. M. *Rev. Mod. Phys.* 19, 361–364 (1947).
- [29] S.W. Hawking e G.F.R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time* , Cambridge University Press (Cambridge, 1973).
- [30] Papantonopoulos, E. *Lecture Notes in Phys. The Physics of the Early Universe*, Vol. 653 (2005).
- [31] E. Komatsu *et al.* *Ap J. S.* **192** (2011).
- [32] Freedman, W.L. et al. (HST Collaboration), **553**, (2001).
- [33] Lima, J. A. S., <http://arxiv.org/abs/0708.3414>, (2007).
- [34] D. N. Spergel et al. [WMAP Collaboration], *Astrophys. J. Suppl.* **148**, (2003).

- [35] A. A. Penzias and R. W. Wilson, *Astrophys. J.* **142**, (1965).
- [36] R. H. Dick, P. J. E. Peebles, P. G. Roll and D. T. Wilkinson, *Astrophys. J.* **142**, (1965).
- [37] Steven Weinberg, *The First Three Minutes*, Bantam Books, (1977).
- [38] E. Martinez-Gonzalez, P. Vielva arXiv:astro-ph/0510003v1 (2005).
- [39] Yamamoto Kazuhiro; Sasaki, Misao; Tanaka, Takahiro; *Astrophys J.* **455**, (1995).
- [40] Hao Liu and Ti-Pei Li, *Astrophys J* **732** (2011).
- [41] D. Cirigliano, H. J. de Vega, N. G. Sanchez, *Phys.Rev. D* **71** (2005).
- [42] Bradt H, *Astro. Methods: A Phys. Approach to Astro. Observations*, Cambridge University Press, (2004).
- [43] Zwicky F. *Helvetica Physica Acta*, **6**, (1933).
- [44] Smith, S. *Astrophysical Journal*, **83**, (1936).
- [45] Rubin, V. C. and Ford, W. K. Jr. *Astrophysical Journal*, **159**, (1970).
- [46] Roberts, M. S.; Rots, A. H. *Astronomy and Astrophysics*, **26**, (1973).
- [47] Z. Ahmed et al., *Phys. Rev. Lett.* **106**, (2011).
- [48] S. Perlmutter et al., *Astrophys. J.* **517**, (1999).
- [49] A. G. Riess et al. [Supernova Search Team Collaboration], *Astron. J.* **116**, (1998).
- [50] de Sitter, W. "The the Curvature of Space." *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet.* 20, 229-243, (1917b).
- [51] T.Padmanabhan, *Physics Reports*, **380** (2003).
- [52] S. David *et al*, *Astrophys. J. Suppl.* **170**, (2007).
- [53] G. Changjun *et. al.* *Physics Letters B* **702** (2011).
- [54] J.J. Van der Bij, et al., *Physica A* **116** (1982).

- [55] W. Buchmuller, N. Dragon, Phys. Lett. B **207** (1988).
- [56] T. Padmanabhan Class. Quant. Grav. **19** (2002).
- [57] J.D. Barrow, F.J. Tipler, *The Anthropic Cosmological Principle*, Clarendon, Oxford, (1986).
- [58] C.J. Hogan, Rev. Mod. Phys. **72** (2000).
- [59] Jihn E. Kim Phys. Rev. D **81**, 123018 (2010).
- [60] Bo Feng, Xiu-Lian Wang, Xinmin Zhang, Phys. Lett. B **607**, (2005).
- [61] V. Faraoni, Int. J. Mod. Phys. D **11**, 471 (2002).
- [62] E. Gunzig et al., Phys. Rev. D **63**, 067301 (2001).
- [63] D. F. Torres, Phys. Rev. D **66**, 043522 (2002).
- [64] T.P. Sotiriou, *The significance of matter coupling in  $f(R)$  gravity*, arXiv:gr-qc/0611158v1 Nov. (2006).
- [65] H. Tiberiu, The European Phys. Jour. **70**, (2010).
- [66] R. R. Caldwell, R. Dave and P. J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. **80**, (1998).
- [67] B. Ratra and J. Peebles, Phys. Rev D **37**, (1988).
- [68] C. Armendáriz-Picón, V. Mukhanov, and P. J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. **85**, (2000).
- [69] C. Armendáriz-Picón, V. Mukhanov, and P. J. Steinhardt, Phys. Rev. D **63**, (2001).
- [70] T. Padmanabhan, Phys. Rev. D **66**, (2002).
- [71] Jie Ren, Xin-He Meng Int.J.Mod.Phys.D **17**, (2008).
- [72] J. S. Bagla, H. K. Jassal and T. Padmanabhan Phys. Rev. D **67**, (2003).
- [73] Gianluca Calcagni and Andrew R. Liddle Phys. Rev. D **74**, (2006).
- [74] R. R. Caldwell, Phys. Lett. B **545**, (2002).

- [75] S. Nojiri and S. D. Odintsov, Phys. Lett. B **562**, (2003).
- [76] S. Nojiri and S. D. Odintsov, Phys. Rev. D **72**, (2005).
- [77] R. R. Caldwell, M. Kamionkowski and N. N. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **91**, (2003).
- [78] A. Y. Kamenshchik, U. Moschella and V. Pasquier, Phys. Lett. B **511**, (2001).
- [79] M. Heydari-Fard and H. R. Sepangi Phys. Rev. D **76**, (2007).
- [80] Z. K. Guo, et al., Phys. Lett. B **608**, (2005).
- [81] J.-Q. Xia, B. Feng and X. Zhang, Mod. Phys. Lett. A **20**, (2005).
- [82] M. R. Setare, Phys. Lett. B **641**, (2006).
- [83] W. Zhao and Y. Zhang, Phys. Rev. D **73**, (2006).
- [84] G.-B. Zhao, J.-Q. Xia, B. Feng and X. Zhang, Int. J. Mod. Phys. D **16**, (2007).
- [85] M. R. Setare, J. Sadeghi, and A.R. Amani, Phys. Lett. B **660**, (2008).
- [86] J. Sadeghi, M. R. Setare, A. Banijamali and F. Milani, Phys. Lett. B **662**, (2008).
- [87] M. R. Setare and E. N. Saridakis, Phys. Lett. B **668**, (2008).
- [88] M. R. Setare and E. N. Saridakis, Int. J. Mod. Phys. D **18**, (2009).
- [89] M. R. Setare and E. N. Saridakis, JCAP **09**, 026 (2008).
- [90] Sotiriou, T. P., and S. Liberati,, Annals Phys. **322**, (2007).
- [91] S. W. Hawking and G. T. Horowitz. Class. Quant. Grav. **13** (1996).
- [92] G. W. Gibbons and S. W. Hawking. Phys. Rev. D. **15** (1977).
- [93] York, J., James W., Phys. Rev. Lett. **28**, (1972).
- [94] M.S. Madsen and J. D. Barrow. Nucl. Phys. **B** (1989).
- [95] G. Alejandro, C. Leonardo and M. T. Juan Gen. Rel. Grav., **42** (2010).
- [96] M. Ferraris, M. Francaviglia and I. Volovich, preprint arXiv: gr-qc/9303007.

- [97] Thomas, P. Sotiriou and Liberati S., *Annals. Phys.* **322** : 935-966, (2007).
- [98] Alberto Saa, arXiv:gr-qc/9309027v1, (1993).
- [99] Hehl, F.W., and Kerlick, G.D., *Gen. Relativ. Gravit.*, **9**, 691–710, (1978).
- [100] Thomas, P. Sotiriou and Liberati S., *J. Phys. : Conf. Ser.* **68** (2007).
- [101] S. Capozziello, R. Cianci, C. Stornaiolo, S. Vignolo *Phys.Scripta* **78**, (2008).
- [102] S. Capozziello et al 2007 *Class. Quantum Grav.* **24** (2008).
- [103] Sotiriou, Thomas P. and Liberati, Stefano *Annals Phys.* **322**, (2007).
- [104] Penrose; R., Rindler; W., *Spinors and Space-Time. Vol 1*, (Cambridge University Press, Cambridge, (1984).
- [105] Tsagas, C. G., *Class. Quantum Grav.* **22** (2005).
- [106] Bouhmadi, M. L. *Journal of Physics : Conference Series* **229**, (2010).
- [107] Zhong, Y., Yu-Xiao Liu, Ke, Y., *Phys. Lett. B* **699**, (2011).